નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૧ લો.

કિંમત ૦-૯-૩

गूजरात विद्यापीठ ग्रंथालय
[गुजराती कॉपीराइट विभाग]
अनुक्रमांक ६७७८ वर्गांक
पुस्तकनुं नाम नवा क्षितिज-१
विषय M२:८४३:३६

Department of Public Instruction, Bombay.

NEW GEOMETRY

PART I.

BY

Balkrishna Shridhar Kolatkar, L. Ag.,

First Asst. D. E. Inspector, Nasik,

AND

Ramchandra Janardan Gokhale, B.A.,

Teacher, Training College for Men, Poona.

Translated into Gujarati

BY

Ganesh Bachaji Sapre, B. A., S. T. C.,

AND

Manmohandas Dalpatram Dalal, B.A., S.T.C.,

Teachers, P. R. Training College, Ahmedabad.

1ST EDITION. 5000 COPIES.

PUBLISHED BY

Chimanlal Chunilal & Co.,

Proprietors,

Chimanlal Maneklal

AND

Chunilal Khushaldas,

AHMEDABAD.

All rights reserved.

1916.

PRICE $8\frac{1}{4}$ ANNAS.

Printed at
THE DIAMOND JUBILEE PRINTING PRESS,
Salapose Road, AHMEDABAD,
by Devidas Chhaganlal Parikh.

મુંબઈ ઇલાકાનું સરકારી કેળવણીખાતું.

નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૧લો.

મૂળ લેખક,
બાળકૃષ્ણ શ્રીધર કોલ્હટકર, એલ્. એજી.
ફર્સ્ટ આ. ડે. એ. ઇન્સ્પેકટર, **નાસિક**,
અને
રામચંદ્ર જનાર્દન ગોખલે, બી. એ.,
શિક્ષક, ટ્રેનિંગ કોલેજ ફોર મેન, **પુના.**
અનુવાદક,
ગણેશ બચાજી સપ્રે, બી. એ., એસ. ટી. સી.,
અને
મનમોહનદાસ દલપતરામ દલાલ, બી. એ.,
એસ. ટી. સી.,
શિક્ષક, પ્રેમચંદ રાયચંદ ટ્રેનિંગ કોલેજ, **અમદાવાદ.**

આવૃત્તિ ૧લી. પ્રત—૫૦૦૦. સને ૧૯૧૬.

છપાવી પ્રસિદ્ધ કરનાર,
ચીમનલાલ, ચુનીલાલની કંપની.
માલીક—ચીમનલાલ માણેકલાલ
અને
ચુનીલાલ ખુશાલદાસ
આસ્તોડીઆ રોડ—**અમદાવાદ.**

સરકારે સર્વ હક્ક સ્વાધીન રાખ્યા છે.

કિં. ૮¾ આના.

ગુજરાત વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય
અમદાવાદ
ગુજરાતી કૉપીરાઈટ-સંગ્રહ
૬૮/

અમદાવાદ—સલાપોસ રોડ,
ધિ "ડાયમંડ જ્યુબિલિ" પ્રિન્ટિંગ પ્રેસમાં
પરીખ દેવીદાસ છગનલાલે છાપ્યું.

પ્રસ્તાવના.



ટ્રેનિંગ કોલેજના નવા કોડ પ્રમાણે ટ્રેનિંગ કોલેજમાં '**નવી ભૂમિતિ**'* શીખવવી જરૂરની છે; તેથી આ વિષય શીખવામાં વિદ્યાર્થીઓને મદદ મળે એ હેતુથી અમે આ પુસ્તક લખ્યું છે.

આ પુસ્તક કોઈ પણ અંગ્રેજી ગ્રંથનું ભાષાંતર નથી, પણ તે અંગ્રેજીમાંના કેટલાક ગ્રંથોને આધારે લખેલું છે. નવી ભૂમિતિમાં પ્રાયોગિક ભાગ વિશેષ મહત્ત્વનો છે, અને તેનો યોગ્ય ઉપયોગ કરવાથી વિદ્યાર્થીઓને આ વિષય સુલભ થવાનો સંભવ છે; તેથી તેનો વિશેષ વિસ્તાર કર્યો છે.

આ પુસ્તક તૈયાર કરવાના કામમાં મેસર્સ **ગોડફ્રે** અને **સિડન્સ**, **બર્નાર્ડ** અને **ચાઈલ્ડ**, **પિયરપોઇંટ**, **એગર** વગેરે ગ્રંથકારોના અંગ્રેજી ગ્રંથો તેમજ દેવકુળેકૃત મરાઠી ભૂમિતિ ઘણી ઉપયોગી થઈ પડી છે. એ માટે આ સર્વે ગ્રંથકારોના પ્રસ્તુત ગ્રંથકાર ઘણા આભારી છે.

ગ્રંથકર્તા.

---

* **નવી ભૂમિતિ**—નવી ભૂમિતિની યોજના કોઈ અમુક ગણિતશાસ્ત્રીએ કરેલી નથી, પણ અનેક ગણિતશાસ્ત્રના શોધકોના પ્રયત્નથીજ તેણે હાલનું સ્વરૂપ ધારણ કર્યું છે: એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ. આ નવી ભૂમિતિ જર્મનિ અને ફ્રાન્સ એ દેશોમાં ઘણા વખત પહેલાં દાખલ થઈ હતી, અને ઇંગ્લાંડમાં તે થોડાજ વખત પર દાખલ થઈ છે. આ યોજનાને અનુસરીનેજ કેળવણીખાતાએ આ દેશમાં નવી ભૂમિતિ દાખલ કરી છે.

શિક્ષકોને સૂચના.



જે શિક્ષકોને આ વિષય છેક નવો છે, તેમણે આગળ આવતા ઉપોદ્‌ઘાતમાં આપેલી નવી ભૂમિતિ સંબંધી માહીતી ધ્યાન દઈને વાંચવી, અને તે યાદ રાખી આ વિષય શીખવવો. શીખવતી વખતે નીચેની બાબતો હંમેશાં ધ્યાનમાં રાખવી:—

(૧) આકૃતિના ધર્મો અનુમાનદ્વારા શીખવતા પહેલાં છોકરાઓ પાસે આકૃતિ કઢાવીને અને તેની બાજુઓ, ખુણા વગેરે મપાવીને તે ધર્મો પ્રત્યક્ષ જોવરાવવાની જરૂર છે; તેથી ૧ થી ૧૫૦ સુધીનાં પાનાંમાંનો પ્રાયોગિક ભાગ કાળજી-પૂર્વક શીખવવો જોઈએ.

(૨) આકૃતિઓ સંબંધી અથવા પ્રમેયો સંબંધી પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ કર્યા પછી, જે ધર્મો છોકરા પાસે કઢાવ્યા હોય, તે તેમને નોંધપોથીમાં નોંધી રાખવા કહેવું.

(૩) આકૃતિઓના ધર્મ અથવા પ્રમેયો બરાબર સમજવા માટે આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે; માટે ભૂમિતિ શીખવતી વખતે શિક્ષકે આકૃતિઓ પાટીઆ પર બરાબર કાઢવી. તેમજ જે આકૃતિઓ છોકરાઓએ કાઢવાની હોય, તે પણ તેમની પાસે સાધનોની મદદથી ભૂલ ન થાય એવી રીતે કઢાવવી. આકૃતિ બરાબર કાઢેલી હોય તો પ્રમેય વધારે સહેલાઈથી સમજી શકાય.

(૪) સર્વ વ્યાખ્યાઓ સામટી શીખવવાને બદલે જેમ જેમ તેમની જરૂર જણાય તેમ તેમ તે એક પછી એક શીખવવી. વ્યાખ્યાઓ સામટી શીખવી હોય તો તેમનો ખપ પડતા સુધીમાં તે ભૂલી જવાનો સંભવ રહે છે; તેથી આ યોજના જરૂરની છે.

(૫) વ્યાખ્યાઓ છોકરાઓને કહી દેવી નહિ, પણ ચોપડી-માં બતાવ્યા પ્રમાણે પ્રયોગ કરી છોકરાઓ પાસે તે કઢાવ-વી. વ્યાખ્યા છોકરાઓ પાસે કઢાવવી શક્ય ન હોય તો તે જુદી જુદી આકૃતિઓની મદદથી છોકરાઓને સ્પષ્ટ રીતે સમજાવવી. છોકરાઓને વ્યાખ્યાઓની સમજણ પડ્યા પછી તેમને લગતી આકૃતિઓ તેમની પાસે કઢાવવી તથા ઓળખાવવી.

(૬) જે પ્રમેયો વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાના હોય છે, તેમની સત્યતા જોકે પહેલાં પ્રાયોગિક ભાગ શીખતી વખ-તેજ તેમના ધ્યાનમાં આવી ગઈ હોય છે, તોપણ તે ભૂલી જવાનો સંભવ રહે છે. તેથી દરેક પ્રમેય શીખવતા પહેલાં તેની સત્યતાનો અનુભવ (પહેલાં એક વખતે તેમણે કર્યો હતો તેમ) પ્રત્યક્ષ પ્રયોગથી ફરી કરાવવો, અને તેવો અનુ-ભવ કરાવ્યા પછી " હવે એજ બાબત આપણે અનુમાનથી સિદ્ધ કરીએ " એમ કહી અનુમાનની મદદથી સિદ્ધતા શરૂ કરવી.



અનુક્રમણિકા.

ઉપોદ્ઘાત.

નવી ભૂમિતિનાં ખાસ લક્ષણો નીચે પ્રમાણે છેઃ—

(૧) આકૃતિના ધર્મ (પ્રમેય–સિદ્ધાંત) અનુમાનથી સિદ્ધ કરતા પહેલાં પ્રત્યક્ષ પ્રયેાગ ઉપરથી તેમની સત્યતાની ખાતરી કરી આપવામાં આવે છે.

(૨) વ્યાખ્યા અને પ્રમેય–સિદ્ધાંત (પ્રમેયમાંના સામાન્ય નિયમેા) વિગમન પદ્ધતિથી (વિશેષ દૃષ્ટાંતેા પરથી સામાન્ય નિયમ ઉપર ઉતરવાની રીતથી) શીખવવાનેા પ્રયત્ન કર્યો છે.

(૩) સિદ્ધાંતેાનેા ક્રમ યુક્લિડથી સહેજ જુદેા છે; કેટલેક ઠેકાણે સિદ્ધતા પણ જુદી રીતે આપી છે; અને યુક્લિડમાંના કેટલાક બહુ જરૂરના ન હેાય એવા સિદ્ધાંતેા કાઢી નાખ્યા છે.

(૪) આકૃતિએા બરાબર દેારવી ઘણી અવશ્યની ગણી છે.

આ ફેરફાર કરવાનાં કારણેા નીચે પ્રમાણે છેઃ—

(૧) ફેાટેા શી રીતે લેવેા તેની માહીતી આપણુને કેાઈ મેાઢેથી આપે, તેા તે બરાબર સમજાશે નહિ એટલુંજ નહિ, પણ તે થેાડાજ વખતમાં ભૂલી જવાશે. જો તેજ માહીતી આપણુને પ્રત્યક્ષ પ્રયેાગ વડે કેાઈએ આપી હેાય, તેા તે સારી રીતે સમજાશે, અને તે એાછામાં એાછા એક અઠવાડીઆ સુધી તેા ભુલાશે નહિ. પણ તેજ પ્રયેાગ આ-પણે પેાતાને હાથે કરીએ, તેા તે બાબત ઉત્તમ પ્રકારે સ-મજાશે એટલુંજ નહિ, પણ તે આશરે એક વરસ સુધી યાદ રહેશે. કેાઈ બાબતનું વર્ણન સાંભળવાથી, તે પ્રત્યક્ષ જોવાથી, અને તે જાતે કરવાથી, એ ત્રણ પ્રકારે મળતા જ્ઞાનમાં આવેા તફાવત પડે છે. કેાઈ પણ પ્રકારના જ્ઞાનને આ નિયમ લાગુ પડે છે. આ ઉપરથી એવેા સામાન્ય નિ-યમ નીકળે છે, કે કેાઈ પણ વસ્તુનું જ્ઞાન એકલા વર્ણનથી

થાય છે, તે કરતાં વધારે જ્ઞાન તે વસ્તુ પ્રત્યક્ષ જોવાથી થાય છે, અને તેથી પણ વધારે જ્ઞાન તે વસ્તુ પ્રત્યક્ષ પોતાને હાથે કરવાથી, અથવા તે વસ્તુનો ઉપયોગ પોતાને હાથે કરવાથી થાય છે. તેથી જ્ઞાન પાકું થાય અને મનમાં બરાબર ઠસે એટલા માટે પ્રયોગ વિદ્યાર્થીએ જાતે કરવા અવસ્યના છે. ભૂમિતિનાં સત્યો વ્યવહારમાં આપણી નજરે પડતાં ન હોવાથી તેમને દૃશ્ય રૂપમાં જોવાની આવશ્યકતા વિશેષ છે. એમ હોવાથી પહેલાં આ વિષય કેવળ વ્યાખ્યાનદ્વારા શીખવાતો હતો તેથી શું પરિણામ આવતું હતું તે આપણે સૌ જાણીએ છીએ. ભૂમિતિ એ વિષય ઘણોજ કઠણ ગણાતો હતો એ વાતજ ખાતરીપૂર્વક સિદ્ધ કરી આપે છે, કે આ વિષય શીખવવાની જુની પદ્ધતિ અયોગ્ય અને કઠણ હતી. ‘કાટખુણો’ ‘સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ’ વગેરે સંજ્ઞામાં, અથવા ‘ત્રિકોણના ત્રણ ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે,’ એવા એકાદ સિદ્ધાંતમાં રહેલી કલ્પના “પ્રત્યક્ષ આકૃતિથી અને પ્રયોગથી સ્પષ્ટ કરી બતાવો” એમ કહ્યું હોત, તો (યુકિલડના ૧લા પુસ્તકના ૩૨ સિદ્ધાંત જેમને ચાલ્યા છે એવા વિદ્યાર્થીઓ પૈકી) કેટલા થોડા વિદ્યાર્થીઓ એવા પ્રશ્નનો સંતોષકારક જવાબ આપી શકત, એ વાતનો વિચાર કરીએ તો જુની પદ્ધતિ કેટલી અયોગ્ય હતી એ સમજી શકાશે. આ પદ્ધતિને લીધે છોકરાઓનું આકૃતિના ધર્મોનું જ્ઞાન ઘણુંજ અધુરૂં રહેતું અને ઘણો ખરો વિષય તેમને ગોખવો પડતો હતો. આ સ્થિતિ દૂર કરવા માટે, આકૃતિના સંબંધમાં છોકરાઓ પાસે પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ કરાવવા એજ એક ઉપાય છે. સમાંતર લીટીઓને છેદતી લીટીથી થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા હોય છે, એ વાત યુક્લિડના ૨૯મા સિદ્ધાંતની શાબ્દિક સિદ્ધતા કહ્યા પછી જેટલી યાદ રહેશે, તે કરતાં તે ખુણા સરખા હોય છે એ

વાત પ્રત્યક્ષ પ્રયોગથી બતાવી હોય તો વધારે સારી રીતે યાદ રહેશે; અને તેજ વાતની ખાતરી વિદ્યાર્થીઓ પોતાને હાથે કરેલા પ્રયોગ વડે કરી જુએ, તો પાકી ધ્યાનમાં રહેશે એ તદ્દન ખુલ્લું છે. આ ઉપરથી ભૂમિતિના નિયમો ધ્યાનમાં રાખવામાં વિદ્યાર્થીઓએ જાતે કરેલા પ્રયોગ તેમને મદદ કરે છે એ નિર્વિવાદ છે. તેથી આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી અને તેમના ધર્મ તપાસી જોવા એ બે બાબતને નવી ભૂમિતિમાં પ્રાધાન્ય આપવામાં આવ્યું છે.

(૨) વિગમનપદ્ધતિની મદદથી વ્યાખ્યાઓનું અને સિદ્ધાંતોનું જ્ઞાન આપવા વિષે.—પારિભાષિક સંજ્ઞા અને સિદ્ધાંતોનો સાધારણ ખ્યાલ આવે તે માટે તે સંજ્ઞાઓ તથા સિદ્ધાંતોમાં દર્શાવેલી બાબતોનું પ્રત્યક્ષ અવલોકન જેમ આવશ્યક છે, તેમજ તે સંબંધનું જ્ઞાન પાકું થાય અને લાંબા વખત સુધી ટકે તે માટે તે બાબતોનું અવલોકન કર્યા પછી છોકરાઓએ પોતેજ માનસિક પ્રયત્ન કરવાની જરૂર છે. આપણે જાણીએ છીએ કે જે વાતો આપણે પોતાની બુદ્ધિના શ્રમથી શીખીએ છીએ, તે આપણને બરાબર સમજાય છે એટલુંજ નહિ, પણ તે પાકી ધ્યાનમાં રહે છે; અને જે વાતો આપણે બીજા લોકો પાસેથી શીખીએ છીએ તે તેટલી સારી પેઠે સમજાતી નથી, અને તે આપણા ધ્યાનમાં લાંબો વખત રહેતી પણ નથી. છોકરાઓના મનની સ્થિતિ પણ એવીજ હોય એ સ્વાભાવિક છે; એટલે જે જ્ઞાન છોકરા પોતાના શ્રમથી મેળવે છે તે તેમના મનમાં બરાબર ઠસે છે; માટે વ્યાખ્યા અને સિદ્ધાંતનું જ્ઞાન ચાલતાં સુધી છોકરા પોતાની મહેનતથી મેળવે એમ કરવું. એમ કરવાનો યોગ્ય માર્ગ એ છે, કે જે વસ્તુઓના ધર્મોનું જ્ઞાન છોકરાઓને આપવું હોય,

તે વસ્તુઓના જુદા જુદા પ્રકાર છોકરા આગળ મૂકવા, અને છોકરાઓ પાસે તેમની સરખામણી કરાવીને તે ઉપરથી થતાં અનુમાન છોકરા પાસે કઢાવવાં. એટલા માટે નવી ભૂમિતિમાં વ્યાખ્યા શીખવવાની પદ્ધતિ એવી છે, કે જે આકૃતિની વ્યાખ્યા છોકરાઓને શીખવવી હોય, તે આકૃતિ તેમની પાસે કઢાવીને તેની બાજુઓ, ખુણા વગેરે ભાગોની પરીક્ષા તેમનીજ પાસે કરાવવી; પછી તેજ જાતની બીજા પ્રકારની આકૃતિઓ કઢાવીને તેમની એક બીજી સાથે સરખામણી કરાવવી; અને આ સરખામણી પરથી જે સામાન્ય ધર્મ જણાઈ આવે તેની મદદથી વ્યાખ્યા ઉપજાવવી. પ્રમેયોનું ખરાપણું નક્કી કરવાની રીત પણ એવીજ છે; એટલે પ્રમેયોના અનેક પ્રત્યક્ષ દાખલા લેવા અને તે પરથી સામાન્ય સિદ્ધાંત નક્કી કરવો.

કોઈ પણ નિયમ કે સિદ્ધાંત નક્કી કરવાની બે પદ્ધતિ છે: એક, બીજા સામાન્ય નિયમોને આધારે તે નિયમ નક્કી કરવાની; અને બીજી, પ્રત્યક્ષ વિશેષ દાખલાઓ વડે તે નિયમ નક્કી કરવાની. આ પૈકી હમણાં ઉપર વર્ણવી તે પદ્ધતિ બીજા પ્રકારની છે. પહેલી પદ્ધતિમાં દોષ એ છે, કે શબ્દોના અર્થના અનિશ્ચિતપણાને લીધે અને જે સામાન્ય નિયમને આધારે અમુક નિયમ નક્કી કરવાનો હોય તેને અપવાદ હોવાથી, તેમજ જુદાં જુદાં વિધાનો (કહેલી બાબતો) ઉપરથી નિર્દોષ અનુમાન શી રીતે કાઢવું એ વિષેના (લોકોના) અજ્ઞાનને લીધે, આ પદ્ધતિથી નક્કી કરેલો સિદ્ધાંત કોઈ કોઈ વખતે ખોટો પડે છે. પરંતુ બીજી પદ્ધતિમાં ઉદાહરણો ઉપરથી સિદ્ધાંત ઠેરવવાનો હોવાથી, જોઈએ તેટલાં જુદાં જુદાં ઉદાહરણો લીધાં હોય તો સિદ્ધાંત ખોટો ઠરવાનો સંભવ ઘણો થોડો હોય છે. માટે ખરા સિદ્ધાંત ઉપજાવવાને આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી છે. તે ઉપરાંત આ

પદ્ધતિમાં પ્રત્યક્ષ ઉદાહરણો ઉપરથી સિદ્ધાંત ઉપજાવવાનો હોવાથી સિદ્ધાંત સહેલાઇથી સમજી શકાય છે. માટે આ પદ્ધતિની માહીતી અને વિશેષ પરિચય થવાની જરૂર છે, તેથી આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ નવી ભૂમિતિમાં કર્યો છે.

જો કે ખરો સિદ્ધાંત નક્કી કરવા માટે નિગમનપદ્ધતિ (સામાન્ય નિયમ પરથી વિશેષ નિયમ ઉપજાવવાની પદ્ધતિ) કરતાં વિગમનપદ્ધતિ વધારે ઉપયોગી છે, તોપણ એટલા ઉપરથીજ નિગમનપદ્ધતિ છેક નકામી ઠરતી નથી. કારણ ઘણી વાર એવું બને છે કે પહેલી પદ્ધતિથી સિદ્ધાંત નક્કી કરવાને જે ઉદાહરણો જરૂરનાં છે તે કોઈ કોઈ વખતે તો મળતાં પણ નથી, અને કોઈ કોઈ વખતે મળી શકે એમ હોય તોપણ તે જોવાને પુરતો વખત હોતો નથી. એવે વખતે અનુમાનથીજ સિદ્ધાંત નક્કી કરવો પડે છે. ન્યાયાધીશને ચુકાદો આપવાના કામમાં, તેજ પ્રમાણે ઐતિહાસિક શોધ કરનારને, ભૂસ્તરશાસ્ત્રીને, તેમજ ખગોળશાસ્ત્રીને ભૂતકાળની અને અદૃશ્ય વાતો વિષે સિદ્ધાંત નક્કી કરવાના કામમાં આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી થાય છે. પોતાની પાસે થોડાજ વખત પર આવેલો કોઈ માણસ કેવાં લક્ષણવાળો હશે, ક્યારે જઈએ તો અમુક માણસ નક્કી ઘેર મળશે,......વગેરે રોજના વ્યવહારમાંની વાતો અનુમાનથીજ નક્કી કરવી પડે છે. તેથી આ પદ્ધતિની પણ માહીતી અને પરિચય હોવાં જરૂરનાં છે; માટે યુક્લિડની ભૂમિતિમાંની અનુમાનપદ્ધતિ પણ નવી ભૂમિતિમાં કાયમ રાખી છે.

સારાંશ એ છે કે નિયમ બરાબર સમજાય અને મનમાં બરાબર ઠસે એટલા માટે પ્રથમ વિગમનપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો, અને પહેલાં નક્કી કરેલા સામાન્ય નિયમ ઉપરથી બીજા સિદ્ધાંતો, નિયમો, અથવા અનુમાનો શી રીતે કાઢવાં તે છોકરાઓ સમજે એટલા માટે પછીથી નિગમનપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો, એવી વ્યવસ્થા નવી ભૂમિતિમાં છે.

(૩) ક્રમ વગેરે બાબતોમાં યુક્લિડથી જુદાપણું.—અસાધારણ બુદ્ધિવાળા કોઈ પણ પુરુષે કરેલું કામ સર્વ અંગે પરિપૂર્ણ હોયજ એમ નથી. માણસે કરેલું કામ ગમે તેટલું ઉત્કૃષ્ટ હોય, તોપણ તેમાં દોષ હોવાનાજ. હોમર, શેક્સ્પિયર, કાળિદાસ એમનાં કાવ્યો અને પ્લેટો, એરિસ્ટૉટલ, ડાર્વિન, સ્પેન્સર, ભાસ્કરાચાર્ય, પાણિનિ ઇત્યાદિ પંડિતોના તાત્ત્વિક અને શાસ્ત્રીય ગ્રંથો પોતાની જાતના ગ્રંથોમાં જો કે અદ્વિતીય છે, તોપણ તેમાં સહેજસાજ દોષો કે ખામીઓ છેજ. તેવીજ રીતે કેટલાક દોષ યુક્લિડની ભૂમિતિમાં પણ છે. તોપણ યુક્લિડમાં કેટલાક દોષ છે એ વાતથી યુક્લિડની યોગ્યતા ઓછી થતી નથી. એક બુદ્ધિમાન ઇંજનેરે એકાદ વિકટ ઘાટમાંનો રસ્તો ગમે તેટલી કુશળતાથી તૈયાર કર્યો હોય, તોપણ તે રસ્તામાં પાછળથી થોડો ઘણો ફેરફાર કરવાની જરૂર પડે છેજ. તેવીજ સ્થિતિ યુક્લિડની ભૂમિતિની છે. યુક્લિડે સિદ્ધાંતોનો જે ક્રમ ઠેરવ્યો છે તે જો કે એકંદરે સારો છે, તોપણ તેમાં કેટલેક ઠેકાણે ફેરફાર કરવો જરૂરનો જણાયો છે. દાખલા તરીકે—યુક્લિડના ૧લા પુસ્તકમાંના ૨ અને ૩ એ સિદ્ધાંતો કાઢી નાખીએ તોપણ ચાલે એમ છે. ચોથા અને પાંચમા સિદ્ધાંત કરતાં ૧૩, ૧૪, ૧૫ એ સિદ્ધાંતો સહેલા હોવાથી અને તે સીધી લીટી વિષેના હોવાથી, તે પહેલાં લેવા એ વધારે સગવડ ભરેલું છે. તેમજ યુક્લિડના પહેલા પુસ્તકમાંનો ૮મો સિદ્ધાંત અને બીજા પુસ્તકનો ૧૩મો સિદ્ધાંત એમની જે સિદ્ધતા યુક્લિડે આપી છે, તેના કરતાં નવી ભૂમિતિમાં આપ્યા મુજબ સહેલી સિદ્ધતા આપવી બની શકે એમ છે.....વગેરે. એ પ્રમાણે યુક્લિડની ભૂમિતિમાં ફેરફાર કરવો અવશ્ય છે, એ કોઈ પણ જોઈ શકશે. આ કારણથી, જે ફેરફાર કરવાથી વિષય સહેલો થાય એમ લાગ્યું તેવા ફેરફાર નવી ભૂમિતિમાં કર્યા છે.

(૪) કંપાસ અને માપવાની પટી વગેરેની મદદ-થી આકૃતિ બરાબર કાઢવા વિષે:—

આકૃતિના ધર્મ નક્કી કરવા એ ભૂમિતિનું મુખ્ય કામ છે. જો આ વિષયમાં 'સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા સરખા હોય છે,' 'આ ખુણો પેલા ખુણાથી મોટો છે,' 'આ લીટી પેલી લીટીથી મોટી છે,' વગેરે બાબતો સિદ્ધ કરવી હોય, તો એવી સરખામણી કરવા માટે આ આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે, એ કોઈ પણ સમજી શકશે. સમબાજુ ત્રિકોણ, લંબચોરસ, ત્રિકોણમાંની મધ્યગા, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ વગેરે આકૃતિઓ બરાબર કાઢી હોય, તો સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા સરખા હોય છે, લંબચોરસના કર્ણ સમાન હોય છે, ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં એક બીજીને છેદે છે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે, એ વગેરે બાબતો તરતજ સમજાય છે. એથી ઉલટું, જો આકૃતિ બરાબર કાઢી ન હોય, તો ઉપલી બાબતો સહેજમાં સમજાતી નથી એટલુંજ નહિ, પણ જે બાબતો આપણે અનુમાનથી સિદ્ધ કરીએ છીએ, તેમના ખરાપણા વિષે પણ શંકા ઉત્પન્ન થાય છે. દાખલા તરીકે—'એકજ ત્રિકોણમાંના સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખી હોય છે,' આ પ્રમેય સિદ્ધ કરતી વખતે ખુણા સરખા કાઢેલા ન હોય તો તે ખુણાની સામેની બાજુઓ નાની મોટી આવશે; અને તેમનું નાનામોટાપણું સ્પષ્ટ હોવાથી, આપણે તેમને સરખી કહીએ છીએ એ બરાબર છે કે કેમ, એવી શંકા, સ્વાભાવિક રીતે ઉત્પન્ન થશે. આ કારણથી આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે.

આકૃતિઓ બરાબર કાઢવા માટે કંપાસ, માપવાની પટી વગેરે સાધનોની આવશ્યકતા છે. તેથી આ સાધનોનો ઉપ-

યોગ કરવો એ પણ નવી ભૂમિતિનું એક ખાસ લક્ષણ છે. યુક્લિડમાં કંપાસ અને આંકણી એ સાધનોથી આકૃતિઓ કાઢવાનું કહ્યું છે; પણ એવી આકૃતિઓ દોરી છે એમ ધારી લેવાનો રિવાજ પડી ગયો હતો. નવી ભૂમિતિમાં તો એવી છૂટ આપવામાં આવતી નથી.

નવી ભૂમિતિનાં બીજાં ગૌણ લક્ષણો નીચે મુજબ છેઃ–

(૧) કોઈ પણ વિધાનના આધાર માટે 'ફલાણો સિદ્ધાંત' એમ કહી સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક આપવાની આ ભૂમિતિમાં આવશ્યકતા નથી. આધાર માટે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવાની પદ્ધતિને લીધે, અમુક સિદ્ધાંતમાં શું છે તેની દરકાર ન રાખતાં વિદ્યાર્થીઓ સિદ્ધાંતોના ક્રમાંક ગોખી રાખે છે. એનું પરિણામ એવું આવે છે, કે તેઓ જે વિધાન કરે છે તેને વાસ્તવિક રીતે કયાં કારણોનો આધાર છે તેનું તેઓને ભાન હોતું નથી. 'ક્ષ ખુણો = જ્ઞ ખુણો,—આધાર ૨૯મો સિદ્ધાંત'—એવું એક વખતે ગોખી રાખ્યું હોય, તો એક ખુણો બીજા ખુણા બરાબર છે એમ કહેવા માટે કયાં કારણોની જરૂર છે, એ વાત સારી પેઠે ધ્યાનમાં રહેતી નથી; અને બે વ્યુત્ક્રમ ખુણા ખરૂં જોતાં બરાબર ન હોય તોપણ તે બરાબર છે એમ ધારવાનું મનમાં આવ્યું, કે ૨૯મા સિદ્ધાંત પ્રમાણે તે બરાબર છે એવું એકદમ છોકરાના મોઢેથી નીકળી જાય છે. એમ ન થાય એટલા માટે આધાર આપતી વખતે છોકરાઓ પાસે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવડાવવાને બદલે જે પક્ષ ઉપરથી સાધ્ય નીકળે છે તે પક્ષ તેમની પાસે કહેવડાવવાની પદ્ધતિ નવી ભૂમિતિમાં છે. તોપણ આધાર હંમેશાં એવી રીતે આપવોજ જોઈએ એમ નથી; કારણ કે છોકરાઓને એક વખત કારણ ધ્યાનમાં લઈને પછી વિધાન કરવાની ટેવ પડી ગઈ, એટલે પછી તેમને આધાર માટે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવાની છૂટ આપી હોય તોપણ ચાલે.

આ પુસ્તકમાં આધાર કહેતી વખતે સિદ્ધાંતના ક્રમાંકજ આપ્યા છે; પણ જગાનો બચાવ કરવા માટેજ એમ કર્યું છે. તેનું અનુકરણ, શરૂઆતમાં તો, વિદ્યાર્થીઓએ સર્વથા ન કરવું.

(૨) ચિહ્નોનો ઉપયોગ.—

अ ખુણો **ब** ખુણા બરાબર છે, અથવા **ब** થી મોટો છે, એમ લખવાને બદલે $\angle$ **अ** = $\angle$ **ब** અથવા $\angle$ **अ** > $\angle$ **ब** એમ લખવું સહેલું છે અને તે વધારે વ્યવસ્થિત દેખાય છે; અને તે વાંચવું પણ વધારે સગવડ ભરેલું લાગે છે; માટે નવી ભૂમિતિમાં ચિહ્નોનો છૂટથી ઉપયોગ કર્યો છે. પરીક્ષામાં આ ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરવા માટે પહેલાં પરીક્ષકોની સંમતિની જરૂર હતી, પણ હવે તેવી સંમતિની જરૂર નથી.

(૩) આધાર માટે પ્રત્યક્ષપ્રમાણ અને સ્વીકૃતકૃત્યોનો નામ દઈને ઉપયોગ કરવાની જરૂર નથી. પ્રત્યક્ષપ્રમાણ અને સ્વીકૃતકૃત્યનો આધાર જે બાબત માટે લેવાનો હોય છે તે ‘પ્રત્યક્ષ’ અને ‘સહેજ સમજાય એવી’ હોય છે, માટે એવી બાબતોને સ્વતંત્ર આધારની જરૂર નથી.

સૂચના.—ભૂમિતિના વિષયની માહીતી પ્રયોગદ્વારા વિદ્યાર્થીઓને શી રીતે કરી આપવી તેનું દિગ્દર્શન કરાવવાના ખાસ હેતુથીજ આ પુસ્તકના **૧લા ખંડમાંની માહીતી આપી છે. તે શિક્ષકોએ ખાસ વાંચવી અને તેમાં કહ્યા પ્રમાણે વિદ્યાર્થીઓ પાસે કૃતિ કરાવવી.**

શુદ્ધિપત્ર.

પૃષ્ઠ	લીટી.	અશુદ્ધ.	શુદ્ધ.
૬(પ્રસ્તાવનાનું)	૧૦	૧થી ૧૫૦	૧૧થી ૧૨૮
૩૨	૨૧	બિંદુની	બિંદુની
૬૫	૧૫	अबफ	अब
૬૫	૧૫	કણ	કર્ણ
૬૬	૧૬	બીજી પડી કે	પડી કે બીજું
૬૮	૭	अकथी	ત્યાંથી, अकथी
૬૯	૧૦	अ બિંદુ	अ બિંદુ
૭૦	૨	પરના	પરનાં
૭૦	૨	વચ્ચેના	વચ્ચેનાં
૭૪	(૧લી આકૃતિમાં)	ड	क
,,	,,	क	ड
૧૦૬	૨૭	ખુણ	ખુણા
૧૫૫	૨૮	त्रक	कत्र
૧૬૧	૨૩	બાજુઓના	બાજુઓનાં
૧૬૧	૨૫	બાજુઓના	બાજુઓનાં
૧૬૪	૨૬	अब फ	अबक
૧૬૬	૧	इ	ई
૧૬૯	૨	∠अबक=∠डफई,	अकब=∠डफई.
૧૮૫	૧૨	∠क	તો ∠क
૧૯૪	૧	बइ	बई
૨૦૨	(આકૃતિમાં)	૩૦°	૩૦°
,,	,,	૬૦°	૬૦°
,,	૭	अड, अई	अड, अई, फड, फई
૨૦૪	૧૭	સિદ્ધતા	સિદ્ધતા
૨૦૯	૧૫	क'	क
૨૧૦	૧	क	क'
૨૧૬	૭	अवं	अ'व'
૨૧૬	૧૦	क'क'' પરિધિની	પરિધિની
૨૨૨	૧૩	कक	कक'
૨૩૪	૨૬	અવસ્યનું	અવશ્યનું

૬૮૯૮

નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૧લો.

ખંડ ૧લો.

(પ્રાયોગિક ભાગ.)

વિદ્યાર્થીઓને અવશ્ય જોઈતાં સાધનો.

માપ લેવાની પટી.—જેના પર ઇંચ અને ડેસિમીટર, તથા તે બંનેના અંશ અથવા ભાગ બતાવેલા હોય એવી પટી. [જે પટીના એકજ પૃષ્ઠની બંને કોરો ઢાળ પડતી હોઈ, એક કોર પર ઇંચ અને બીજી કોર પર મીટરના ભાગ બતાવ્યા હોય એવી પટી વધારે સારી.]

સેટ સ્કવેર કે ત્રિકોણમાપ.—(૧) જેના ખુણા ૯૦°, ૬૦°, અને ૩૦°ના હોય, અને જેનો કર્ણ (સૌથી લાંબી બાજુ) આશરે ૬ ઇંચ હોય, એવું ત્રિકોણમાપ. (૨) ૯૦°, ૪૫°, અને ૪૫°ના ખુણાવાળું ત્રિકોણમાપ. [આ ન હોય તોપણ ચાલે.]

વિભાજક (જેનાં બંને પાંખાં અણીવાળાં હોય છે તે) અને **કંપાસ** (જેના એક પાંખામાં પેન્સિલ ખોસાય છે તે.)—[જેમાં જરૂરિઆત પ્રમાણે પેન્સિલ કે પોલાદી અણીઉં બેસાડી શકાય એવો કંપાસ હોય તો જુદા વિભાજકની જરૂર નહિ પડે.]

એચ્ પેન્સિલ.—૨ એચ્ કે ૩ એચ્‌ની પેન્સિલ હોય તો વધારે સારૂં. બની શકે તો ૩ એચ્‌ની પેન્સિલનો ઉપયોગ કરવો.

[કંપાસની પેન્સિલની અને આકૃતિ કાઢવાની પેન્સિલની અણી પૉલિશ પેપરથી (કાચ પાએલા કાગળથી) ઘસીને હંમેશાં ઝીણી રાખવી. આકૃતિ કાઢવાની પેન્સિલની અણી સોયના જેવી ઝીણી ન રાખતાં ફરસીના જેવી ચપટી રાખવી.]

કોણમાપક.—(પ્રોટ્રૅક્ટર)—અર્ધવર્તુળાકાર કોણમાપક કરતાં ચતુષ્કોણ કોણમાપક વધારે સારો ખરો; પણ શરૂઆતમાં અર્ધવર્તુળાકાર કોણમાપકનો ઉપયોગ કરવો સહેલો પડે છે, માટે તેનોજ ઉપયોગ કરવો.

તે સિવાય ટ્રેસ કરવાનો કાગળ, ચોરસ આંકેલી એક્સર્સાઈઝ બુકો,* દોરો, ટાંકણી વગેરે.

[પ્રયોગ ઉપરથી જે અનુમાન નીકળે છે તે વિદ્યાર્થીઓએ એક જુદીજ નોંધપોથીમાં નોંધી રાખવાં.]

લીટીઓ માપવા વિષે.

લીટીઓ માપવા માટે પટી અને વિભાજક વપરાય છે.

માપ લેવાની પટી (અથવા ફુટપટી અને મીટરપટી)—આ પટી પર એક કોરે ઇંચ અને ઇંચના દશાંશ, તથા બીજી કોરે **મીટરના**+ ભાગ જણાવેલા હોય છે. એક

---

* ભૂમિતિના બીજા ભાગમાં વાપરવા માટે.

\+ **મીટર**—જુદા જુદા દેશમાંનાં વજન તથા માપ જુદાં જુદાં હોવાથી વેપારને તેમજ બીજા વ્યવહારને ભારે હરકત નડે છે. લોકોને આજ ઘણાં વર્ષ થયાં તે દૂર કરવાની ઇચ્છા થઈ છે; પરંતુ આ કામ માટે ફ્રેંચ સિવાય બીજા કોઈ લોકો આગળ આવ્યા નથી. તેમણે આજથી આશરે ૭૫ વર્ષ પહેલાં જુનાં

મીટર એટલે આસરે ૩૯·૩૭ ઇંચ થાય છે. મીટરના ડેસિમીટર, સેન્ટિમીટર, મિલિમીટર એવા ભાગ છે. પટી પર દર્શાવેલા મીટરના ભાગ પૈકી સૌથી નાનો ભાગ (પાસ પાસેની બે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર) મિલિમીટર છે.

મીટરનું કોષ્ટક.

(મિલિમીટર = $\frac{1}{1000}$ મીટર).

૧૦ મિલિમીટર	=	૧ સેંટિમીટર	(= $\frac{1}{100}$ મીટર)	
૧૦ સેંટિમીટર	=	૧ ડેસિમીટર	(= $\frac{1}{10}$ મીટર)	
૧૦ ડેસિમીટર	=	૧ મીટર		
૧૦ મીટર	=	૧ ડીકામીટર	(= ૧૦ મીટર)	
૧૦ ડીકામીટર	=	૧ હેક્ટોમીટર	(= ૧૦૦ મીટર)	
૧૦ હેક્ટોમીટર	=	૧ કિલોમીટર	(= ૧૦૦૦ મીટર)	

આ ભૂમિતિમાં ઉપલાં છેલ્લાં ત્રણ માપનો બીલકુલ ઉપ-

વજન અને માપ બંધ કરીને તેમની જગાએ નિયમિત પ્રમાણમાં (દશકથી) વધતાં અને ઘટતાં નવાં માપ યોજ્યાં. માપ માટે પ્રથમ પરિમાણ જે લેવું તે ગમે તે એક સંકેત નક્કી કરીને નહિ, પણ કોઈ અમુક નિશ્ચિત અને સર્વસામાન્ય પરિમાણને આધારે લેવું, એમ વિચારીને તેમણે પૃથ્વીના એક અમુક યામ્યોત્તરવૃત્ત ઉપરથી લંબાઈનું મૂળ પરિમાણ નક્કી કર્યું છે, અને તેને મીટર એ નામ આપ્યું છે. મીટર એ પારિસમાં થઈ જતા યામ્યોત્તર-વૃત્તનો $\frac{1}{4000000}$ ભાગ છે. આ મીટર ઉપરથીજ તેમણે બધાં વજન અને માપ નક્કી કર્યાં છે. દાખલા તરીકે-**આર** અથવા ૧૦૦ ચોરસ મીટર એ ક્ષેત્રફળનું મૂળ પરિમાણ છે. એક ઘન સેન્ટિમીટર પાણીનું (૩૯.૨ ફૅરેન્હાઇટ ઉષ્ણતામાને) વજન, કે **ગ્રામ** તે વજનનું મૂળ પરિમાણ છે; અને **લિટર** અથવા એક ઘન ડેસિમીટર એ અનાજ વગેરેના ભરતલના માપનું મૂળ પરિમાણ છે.

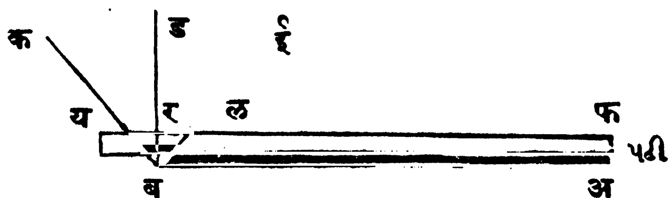
ચોગ નથી, તેથી વિદ્યાર્થીએ તે ધ્યાનમાં રાખવાની જરૂર નથી.

પટી ઉપરના ઇંચ અને તેના દશાંશ, અને તેવીજ રીતે મીટરના ભાગ છોકરાઓ બરાબર સમજ્યા છે એવી પોતાની ખાતરી કરી લઈ પછી છોકરાઓ પાસે લીટીઓ મપાવવી.

લંબાઈ કે અંતર માપવાની ચોકસ રીત.—કોઈ અમુક લીટીની લંબાઈ કે બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર ચોકસાઈથી માપવા માટે વિભાજકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ રીત નીચે પ્રમાણે છેઃ—જે અંતર માપવું હોય, તે કરતાં જરા વધારે અંતર વિભાજકની અણીઓ વચ્ચે રહે એમ વિભાજક ઉઘાડવો; પછી હળવે રહી દબાવીને અણીઓની વચ્ચેનું અંતર ઓછું કરતાં કરતાં બે અણી આપેલી લીટીના બે છેડા પર બરાબર આવે એમ કરવું. પછી વિભાજકની અણીઓ પટી પર મૂકી પટી પરનું અંતર ગણવું. (વિભાજકનાં પાંખાં પટી પર ઉભાં ન રાખતાં ત્રાંસાં કે આડાં રાખવાં; એમ કરવાથી વિભાજકની અણી પટીને વાગવાથી પટીને કાણાં પડવાની બીક રહેશે નહિ.)

ખાસ ચોકસાઈની જરૂર ન હોય ત્યારે લીટી માપવા માટે ફક્ત પટીનો ઉપયોગ કરવો. પટીથી લીટી માપવી હોય, તો તે કામ માટે લંબાઈની બંને બાજુએ ઢાળ પડતી હોય એવી પટી સારી પડશે.

પટી બંને બાજુએ ઢાળ પડતી ન હોય, તો પટી લીટી પર મૂક્યા પછી, લીટીનો છેડો પટી પરની કઈ નિશાનીની નીચે આવે છે તે જોવા માટે લીટીના છેડાની ઉપલી બાજુએ લંબમાં આંખ મૂકીને જોવું. લંબમાં ન જોતાં વાંકું જોયું હોય તો લીટીનો છેડો ખરેખર જે કાપા નીચે હોય છે તેનાથી કોઈ જુદાજ કાપા નીચે દેખાય છે. એમ કેમ બને છે તે નીચેની આકૃતિ ઉપરથી જણાઈ આવશે.



(પટીની ઉપલી આકૃતિમાં ઉભી લીટી પટીની જાડાઈ દર્શાવે છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું.)

ધારો કે **अब** લીટીની લંબાઈ માપવી છે. જોનારની આંખ **बड** લંબના **ड** બિંદુ પાસે હશે, તો **ब** છેડો **र** બિંદુની નીચે દેખાશે, અને **अब** લીટીની લંબાઈ **फर** જેટલી લાગશે. જો આંખ **ई** સ્થાનમાં હશે, તો **अब** લીટીની લંબાઈ **फल** જેટલી લાગશે; આંખ **क** સ્થાને હશે, તો **अब**ની લંબાઈ **फय** જેટલી લાગશે.

પ્રશ્નો.

૧. **अब** લીટીની લંબાઈ ઇંચ અને મિલિમીટરમાં માપો.*

अ————————————**ब**

૨. આ પુસ્તકની લંબાઈ અને પહોળાઈ ઇંચ અને મિલિમીટરમાં માપો.

૩. ઉપલા પ્રશ્નોના જવાબ ઉપરથી એક ઇંચમાં કેટલાં મિલિમીટર આવે છે તે શોધી કાઢો. વિભાજકની અણીઓનું અંતર ૩·૮ ઇંચ રાખો, અને તે અણીઓ પટી પર મિલિમીટરોની બાજુએ મૂકીને તેમાં કેટલાં સેંટિમીટર અને મિલિમીટર આવે છે તે શોધી કાઢો.

૪. માપવાની પટીની મદદથી નીચેની બે લીટી પૈકી દરેકની લંબાઈ મીટર અને ઇંચના દશાંશમાં કહો.

---

* લંબાઈ કે અંતર ઇંચ અને ઇંચના દશાંશ તથા મિલિમીટરમાં આપવામાં આવે છે.

---

૫. **अक, कब**ની લંબાઈ ઇંચમાં માપો અને તેમનો સરવાળો કરો. પછી **अब**ની લંબાઈ માપીને પહેલો જવાબ બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

अ **क** **ब**

૬. **अक, कड, डब**ની લંબાઈ ઇંચમાં માપો અને તેમનો સરવાળો કરો. પછી **अब**ની લંબાઈ માપીને પહેલાંનો જવાબ બરાબર છે કે નહિ તે જુઓ.

મિલિમીટરમાં પણ લંબાઈ માપીને ઉપલા બંને પ્રશ્નના જવાબ કાઢો.

अ **क** **ब**

૭. **अब** લીટીની લંબાઈ માપો. **अक**ની લંબાઈ માપીને તે **अब**માંથી બાદ કરો, એટલે **कब**ની લંબાઈ નીકળશે. **कब**ની લંબાઈ પ્રત્યક્ષ માપીને પહેલાંનો જવાબ બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

अ **ब**

૮. ૨·૭ ઇંચ લાંબી લીટી લો, અને તેમાં ગમે ત્યાં એક બિંદુ લઈને તેનાં બંને છેડેથી અંતરો માપો. તેમનો સરવાળો કરો, અને તે ૨·૭ થાય છે કે નહિ તે જુઓ. થતો ન હોય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

૯. **अब** લીટી ૪·૫″* લો. તેમાં **अक**=૧·૨″, **कड**= ૨·૬″ લઈને **डब**ની લંબાઈ માપો. તે ખરી લંબાઈની સાથે

---

* ″ આ ચિહ્નનો અર્થ ઇંચ થાય છે. દાખલા તરીકે ૧·૨″ એટલે ૧·૨ ઇંચ.

મળતી આવે છે કે કેમ તે જુઓ. મળતી આવતી ન હોય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

૧૦. એક ૬·૬"ની લીટી લો. તેના ૧:૫ના પ્રમાણમાં હોય એવા બે ભાગ કરો.

(નીચેના ૧૧–૧૬ પ્રશ્નો પહેલે ફેરે મૂકી દીધા હોય તોપણ ચાલે.)

૧૧. એક લીટી લઈને તેની લંબાઈની અટકળ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને તમારી અટકળ કેટલે દરજ્જે ખરી છે તે જુઓ. (પુ૦)×

૧૨. ૩·૬" લીટી લઈને તેના અર્ધા ભાગની લંબાઈ ગણિતથી નક્કી કરીને તેટલો ભાગ કાપો. બાકી રહેલા ભાગની લંબાઈ માપીને તે થવી જોઈએ તેટલી છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૩. ૩૩ મિ. મી.+ લીટી લઈને તેનો ત્રીજો ભાગ ગણિતથી નક્કી કરીને તેટલા મોટા બે ભાગ તે લીટીમાંથી કાપી કાઢો. રહેલા ત્રીજા ભાગની લંબાઈ માપીને તે બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૪. **अब**ના અટકળથી સરખા બે ભાગ કરો, અને તે બરાબર છે કે નહિ તે પ્રત્યક્ષ માપી જુઓ. (પુ૦)

૧૫. **अब**ના અટકળથી ત્રણ સરખા ભાગ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૬. **अब**ના અટકળથી ચાર સરખા ભાગ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

× પુ૦=પુનરાવર્તન; એટલે એજ બાબતનું પુનરાવર્તન કરો. કોઈ પણ બાબત બરાબર આવડે ત્યાંસુધી તેનું પુનરાવર્તન કરવું પડે છે.

+ મિ. મી.=મિલિમીટર.

(જવાબ સાધારણ રીતે બરાબર આવે ત્યાંસુધી વિદ્યાર્થીએ ઉપર પ્રમાણે લીટીઓની લંબાઈ અટકળથી માપવાનો મહાવરો કરવો.)

લીટીઓ દુભાગવા વિષે.

આપેલી લીટીના બે સરખા ભાગ કરવાની સ્થૂળ રીત:—વિભાજકની અણીઓ આપેલી લીટીની અર્ધી લંબાઈ જેટલે અંતરે આસરે રાખવી. લીટીને વિભાજક લગાડીને આપેલી લીટીના બે સરખા ભાગ પડે છે કે કેમ તે જોવું. પડતા હોય તો ઠીકજ છે; પરંતુ પડતા ન હોય તો જે તફાવત પડે તેનો અર્ધો ભાગ વિભાજકની અણીઓની વચ્ચેના અંતરમાં જરૂર જણાય તેમ વત્તો કે ઓછો કરવો.

દાખલા તરીકે:—**अब** લીટીના બે સરખા ભાગ કરવા છે. તેના આસરે અર્ધા ભાગ જેટલે અંતરે વિભાજકની બે અણીઓ રહે એટલો વિભાજક પહોળો કરો, અને તે **अब** લીટી પર મૂકો. ધારો કે તે બે અણીઓ **अ** અને **ग** પર પડે છે. એમજ બીજી વાર ભાજકને **ग** બિંદુથી શરૂ કરીને મૂકો એટલે બીજી અણી **क** પર પડશે. આ બે ભાગ મળીને આપેલી લીટીથી ઓછા થાય છે, માટે બાકી રહેલા (**कब** અક્ષરથી દેખાડેલા) અંતરના અર્ધ જેટલી

अ ग क ड ब

(**कड** જેટલી) વિભાજકની અણીઓ વધારે પહોળી કરવી. એટલે પહેલાં વિભાજકની અણીઓની વચ્ચે **कग** જેટલું અંતર હતું, તે અંતર હવે **गड** જેટલું થશે. હવે વિભાજક લીટી પર મૂકશો તો તેની બે અણીઓ પહેલી વખત **अ** ને **ह**

પર, ને બીજી વખત **ह** ને **ब** પર પડી રહેશે. એટલે **अब** લીટી **ह** બિંદુમાં દુભગાઈ.

એજ રીતે આપેલી કોઈ પણ લીટીના, જે સંખ્યા એનો ઘાત હોય તે સંખ્યા જેટલા સરખા ભાગ કરી શકાશે.

પ્રશ્નો.

૧. ૩·૨", ૪·૩", ૨·૯", ૩·૭" લંબાઈની લીટી દોરો, અને તેમના બે સરખા ભાગ કરો.

૨. ઉપલા પ્રશ્નમાંની લીટીઓના ૪ સરખા ભાગ કરો.

કાગળ વાળીને લીટી દુભાગવાની રીત.—अब લીટી કાગળ પર દોરો. હવે એ કાગળને એવી રીતે વાળો કે આખી **अब** લીટી સળ ઉપર બહારની બાજુએ બરાબર આવી રહે. હવે **अ** છેડો **ब** ઉપર આવે એવી રીતે કાગળ ફરીથી વાળો. બીજી વખત વાળતાં જ્યાં સળ પડશે ત્યાં લીટીના સરખા બે ભાગ થશે.

કાગળ ઉપર ૨", ૨·૫", ૩", ૩·૭", ૩·૩", ૪·૯"... લંબાઈની લીટીઓ લઈને તે ઉપલી રીતે દુભાગો, અને તે બરાબર દુભગાઈ છે કે કેમ તે વિભાજકની મદદથી તપાસી જુઓ.

સ્કેલ કે અંતરપ્રમાણ.

વર્ગમાંના કાળા પાટીઆની લંબાઈ માપો. તે કેટલા ફુટ છે? "ચાર ફુટ." એજ પાટીઆની આકૃતિ આ પાના પર દોરી છે તે જુઓ. આ આકૃતિમાંની પાટીઆની લંબાઈ માપો. તે કેટલા ઇંચ છે? "આ લંબાઈ અર્ધો ઇંચ છે." આ ઉપરથી પાટીઆની લંબાઈ અર્ધો ઇંચ છે એમ સમજવાનું કે? આ આકૃતિમાંની અર્ધો ઇંચ લંબાઈ પરથી ખરી લંબાઈ કેટલી સમજવાની? "ચાર ફુટ."

આ આકૃતિમાંની પાટીઆની પહેાળાઈ માપેા. તે કેટલી છે ? " અર્ધો ઇંચ." આ ઉપરથી પાટીઆની ખરી પહેાળાઈ કેટલી છે, તે તમારા જાણવામાં આવે છે ? " ચાર ફુટ." આ કેમ સમજાયું ? " પેલી આકૃતિમાંની અર્ધો ઇંચ લંબાઈ જો ૪ ફુટ દર્શાવે છે, તેા અર્ધો ઇંચ પહેાળાઈ પણ ૪ ફુટ દર્શાવે છે."

પાસે ટેકરીનું ચિત્ર દેારેલું છે. આ ટેકરીની ઉંચાઈ કેટલી છે, તે ચિત્ર ઉપરથી તમે કહી શકશેા કે ? તે કહેવાને વળી કઈ બાબત આપેલી હેાવી જોઈએ ? " ચિત્ર અને ટેકરી એ એની ઉંચાઈનું પ્રમાણ."



આકૃતિમાં બતાવેલું અંતર (લંબાઈ પહેાળાઈ વગેરે) અને ખરૂં અંતર એ એની વચ્ચેના પ્રમાણને અંતરપ્રમાણ (અંગ્રેજીમાં સ્કેલ) કહે છે. આ પ્રમાણ આપેલું ન હેાય તેા આકૃતિ જોનારને, તે આકૃતિ જે વસ્તુની છે તે વસ્તુનું ખરૂં પરિમાણ શું છે તે જણાશે કે ? "ના." ઠીક. જો પ્રમાણની જરૂર ન રાખતાં વસ્તુઓ હેાય તેટલી મેાટી દેારવા જઈએ તેા શી અગવડ પડે ? " ......"

વસ્તુ જેટલા કદની હેાય તેટલાજ કદની આકૃતિ કાગળ પર સાધારણ રીતે દેારી શકાતી નથી. દાખલા તરીકે, ઘણાજ નાના પદાર્થો જેટલા કદના દેખાય છે, તેટલીજ નાની તેમની આકૃતિ હાથે કાઢી શકાતી નથી; અને યંત્રાેની મદદથી (ફેાટેા વગેરે લઈને) તે કાઢી શકાતી હેાય, તેાપણ તે નરી આંખેા વડે જોનારને સ્પષ્ટ દેખાતી નથી; માટે તે અસલ પદાર્થ કરતાં મેાટી દેારવી પડે છે. એથી ઉલટું, જે પદાર્થો મેાટા હેાય છે, તેમની આકૃતિ તેમના જેટલી મેાટી દેારવા માટે ઘણેાજ મેાટેા કાગળ લેવેા પડશે; માટે તેમની આકૃતિ

તેમનાથી નાની દોરવી પડે છે. આ કારણને લીધે વસ્તુની આકૃતિ દોર્યા પછી તે વસ્તુનું ખરેખર કદ કેટલું છે એ સમજવા માટે તે આકૃતિની લંબાઈ અને તે વસ્તુની ખરી લંબાઈ એ બેનું પ્રમાણ આપવું પડે છે. નકશાની નીચે સ્કેલ આપે છે તે એટલાજ માટે.

અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક—આકૃતિની લંબાઈ અંશની જગાએ, અને વસ્તુની ખરી લંબાઈ છેદની જગાએ લખવાથી જે અપૂર્ણાંક આવે છે, તેને **અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક** કહે છે. દાખલા તરીકે, આકૃતિમાં એક ઇંચ એક માઇલ દેખાડતો હોય ત્યારે $\frac{૧}{૫૨૮૦\times૧૨}=\frac{૧}{૬૩૩૬૦}$ આ અપૂર્ણાંકને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે; ૨ ઇંચ એક માઇલ દર્શાવતા હોય ત્યારે $\frac{૨}{૫૨૮૦\times૧૨}=\frac{૧}{૩૧૬૮૦}$ આ અપૂર્ણાંકને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે; ૩ ઇંચ એક માઇલ દર્શાવતા હોય ત્યારે $\frac{૩}{૫૨૮૦\times૧૨}$ આ અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક થાય; ... વગેરે.

પ્રશ્નો.

૧. હિંદુસ્તાનના નકશા ઉપરથી નીચેનાં સ્થળોની વચ્ચેનું અંતર કાઢો:—કાશી અને કલકત્તા, કરાંચી અને કલકત્તા, મુંબઈ અને મદ્રાસ વગેરે.

૨. પાસે જે ઝાડોનાં ચિત્ર આપેલાં છે, તે જે પ્રમાણ ઉપર દોરેલાં છે, તે પ્રમાણ ૧": ૫' એટલે એક ઇંચ પાંચ ફુટ માટે* છે. તો તેમની ઉંચાઈ કેટલી તે કહો.



* ' આ નિશાની ફુટ માટે છે. દાખલા તરીકે ૫'=૫ ફુટ.



૩. પાસે દેખાડેલા ડુંગરની ઉંચાઈ કાઢો. સ્કેલ ૧″=૧૦૦૦′.

૪. એક માઇલ માટે એક ઇંચ પ્રમાણ લઈને, જેમની વચ્ચે ૨ $\frac{૩}{૪}$ માઇલ અંતર છે એવાં બિંદુ કાઢો.

૫. ૧″=૨ માઇલ, એ સ્કેલ લઈને ૪ માઇલ લાંબો સીધો રસ્તો કાઢો.

૬. ૧″=૧ માઇલ, આ સ્કેલ લઈને જેમની વચ્ચેનું અંતર ૨·૫ માઇલ હોય એવાં બે ગામની જગાઓ ટપકાંથી દર્શાવો.

૭. ૨″=૧ યાર્ડ, એ સ્કેલ લઈને ૪૫″ ઉંચી લાકડી ઉભી લીટીથી દર્શાવો.

સૂચના—નીચેના પ્રશ્નો છોડવા માટે કાટખુણો કાઢવાની રીતની જરૂર પડે છે. તે પાછલાં પાનાં જોઈને કહેવી, અથવા તે ભાગ ચલાવ્યા પછી નીચેના પ્રશ્ન છોડાવવા.

૮. ૫૦૦′ લાંબા અને ૧૦૦′ પહોળા ખેતરની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ ૧ સેં.મી.*=૧૦૦′).

૯. ૩૨૨′ લાંબા અને ૧૮૨′ પહોળા ખેતરની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ ૧ સેં.મી.=૧૪′).

૧૦. જેની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે ૪૦૦′ અને ૩૦૦′ છે, અને જેની આસપાસની ભીંતની પહોળાઈ ૧૦′ છે, એવા તળાવની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ ૧″=૧૦૦′.)

૧૧. **બક** સીઢી **અડ** ભીંતે ટેકવીને ઉભી કરેલી છે.

---

* સેં.મી =સેન્ટિમીટર.

અ ભીંતનો પાયો છે. હવે **અબ**=૬′ અને **અક**=૮′ હોય તો સીઢીની લંબાઈ કેટલી ?+

૧૨. ઉપલા પ્રશ્નમાં **અબ** અંતર ૯′ અને **અક** ૪૦′ હોય તો સીઢીની લંબાઈ કેટલી ?

૧૩. જેની લંબાઈ ૩૦ ફુટ છે અને પહોળાઈ ૨૨ ફુટ છે, એવી ઓરડીની ભોંયતળીઆની આકૃતિ કાઢો અને તેના સામસામા બે ખુણાની વચ્ચેનું અંતર માપો.

[**સૂચના**—પૂર્વ અને દક્ષિણ, દક્ષિણ અને પશ્ચિમ, પશ્ચિમ અને ઉત્તર, અને ઉત્તર તથા પૂર્વ આ પાસપાસેની બબ્બે દિશાની વચ્ચે કાટખુણો હોય છે, એ વિદ્યાર્થીઓને કહીને પછી નીચેના પ્રશ્નો છોડવા કહેવું.]

૧૪. એક માણસ બરાબર પૂર્વમાં ૮.૨ માઇલ ગયો, અને ત્યાંથી બરાબર ઉત્તર તરફ ૫.૩ માઇલ ગયો; તો તે જ્યાંથી નીકળ્યો ત્યાંથી કેટલા માઇલ સીધો આઘો ગયો તે કહો.

૧૫. એક માણસ **અ** આગળથી નીકળીને બરાબર પૂર્વ તરફ ૩ માઇલ જાય છે, પછી બરાબર ઉત્તર તરફ ૪ માઇલ જાય છે, અને ત્યાંથી બરાબર પૂર્વમાં ૩ માઇલ જઈને **બ** સ્થળે પહોંચે છે; તો **અ બ** વચ્ચે અંતર કેટલું ?

૧૬. **બ**, **અ**ની પૂર્વમાં ૯ માઇલ છે. **ક**, **બ**ની ઉત્તરમાં ૧૨ માઇલ છે. **ड**, **क**ની પશ્ચિમમાં ૧૫ માઇલ છે; તો **અ**થી **બ** કેટલો આઘો છે ?

૧૭. **અ**ની પૂર્વમાં **બ** ૩ માઇલ છે. **બ**ની દક્ષિણમાં **ક** ૨ માઇલ છે. **ક**ની ઈશાનમાં **ड** ૩ માઇલ છે. **ड**ની વાયવ્યમાં **ई** ૪ માઇલ છે; તો **અ**થી **ई** કેટલા માઇલ આઘો છે ?

+ આ અને હવે પછીના આના જેવા પ્રશ્નોમાં પ્રત્યક્ષ સીઢી માપીને સ્કેલની મદદથી જવાબ કહેવાનો હોય છે. અંતરપ્રમાણ સગવડ પ્રમાણે ગમે તે લેવું.

૧૮. **અ**થી **બ** પૂર્વમાં છે, અને તે બે વચ્ચે ૪૦૦ ફુટનું અંતર છે. **ક** સ્થળ **અ**ની બરાબર ઇશાનમાં અને **બ**ની બરાબર વાયવ્યમાં છે; તો **ક**નું **અ**થી અંતર કેટલું ?

ખુણો.

પાસે દોરેલી આકૃતિ જેવી આકૃતિ પાટીઆ પર અથવા મોટા કાગળ પર દોરો, અને તે કાગળ ટાંકણીઓથી પાટીઆ પર ચોઢો. વાંસની બે સાંકડી કામડીઓ લઈને તેમના એક છેડામાં કાણાં પાડો, અને કાણાંમાં તાર કે ટાંકણી ઘાલીને તેના છેડા વાળો, અને મજાગરા જેવું બનાવો. પછી આ બે કામડીઓથી બનેલો કંપાસ

લઈને તેની નીચેની કામડી આકૃતિમાં દેખાડ્યા પ્રમાણે પાટીઆ પર આડી સજ્જડ બેસાડો. પછી ઉપલી કામડીનો જમણા હાથ તરફનો એટલે છુટો છેડો ઘડિઆળના કાંટાથી ઉલટી દિશામાં જરા ખસેડો, એટલે મજાગરા પાસે (જ્યાં પેલી કામડીના છેડા તારથી જોડી દીધા છે ત્યાં) ખુણો થશે. તે છોકરાઓને દેખાડો, અને "આ બે કામડીઓ એક બીજીને મળે છે ત્યાં આગળ જે ખુણો બન્યો છે તેને કોણ કે ખુણો કહે છે," એમ કહો. કોણ એટલે ખુણો. બધા ખુણા બે લીટી* કે બે બાજુઓ

---

* આ પુસ્તકમાં લીટી એ શબ્દનો અર્થ ઘણેખરે ઠેકાણે સીધી લીટી એવો કરવાનો છે.

મળવાથીજ બને છે. (પાસેના પદાર્થો બતાવીને તેમના ખુણા બતાવવા છોકરાઓને કહો. દાખલા તરીકે, મેજના ખુણા, ભીંતો એક બીજીને જ્યાં મળે છે તે ખુણા......વગેરે.) ઉપર કહેલી કામડીઓના છુટા છેડા વચ્ચેનું અંતર વધારો (ઉપલી કામડીનો છુટો છેડો ગોળ કુંડાળામાં ફેરવો), અને પહેલાંનાથી બમણો ખુણો બનાવો. પહેલાં કરતાં હવે ખુણો મોટો થયો છે કે ? પહેલાં કામડીનો છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો હતો ? હવે કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો છે ? પહેલાંના ખુણા કરતાં આ ખુણો કેટલાગણો મોટો છે ? " બમણો. " કામડીનો છેડો જરા જરા આગળ ખસેડીને ખુણો મોટો બનાવતા જાઓ, અને આ ખુણો કાટખુણા કરતાં ઓછો હોય તેજ વખતે તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો× તે ખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો છે એમ પૂછો. "મોટો છે" એમ છોકરા કહેશે. પછી કામડીથી બનેલો ખુણો વધારો, અને આ ખુણો જેમ જેમ વધતો જાય છે તેમ તેમ ન્યૂનતાપૂરક ખુણામાં શો ફેરફાર થતો જાય છે તે પૂછો. તે ખુણો નાનો નાનો થતો જાય છે એમ છોકરા કહેશે. પહેલો ખુણો કાટખુણા બરાબર થયો, એટલે તે ખુણો અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ પેકી મોટો કયો એમ પૂછો. બંને સરખા છે એમ કહે, તો " એટલા મોટા ખુણાને **કાટખુણો** કહે છે " એમ કહો. કાટખુણાના બીજા દાખલા છોકરાઓને બતાવો, અને પછી તેવા બીજા દાખલા તેમની પાસે કઢાવો. કામડીનો છેડો આગળ ખસેડો, અને થએલો ખુણો કાટખુણાથી મોટો છે, અને તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કાટખુણા કરતાં નાનો છે, એ કઢાવો. એ પ્રમાણે છેડો આગળ ખસેડતાં ખસેડતાં, પહેલો

× ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ શબ્દનો ઉપયોગ આ વખતે છોકરાઓ સાથે બોલવામાં કરવો નહિ, પણ તે ખુણો હાથે દેખાડવો. ઉપલો શબ્દ કેવળ શિક્ષકો માટે યોજેલો છે.

ખુણો અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ બે વચ્ચે પડતો તફાવત છોકરા પાસેથીજ કઢાવો. કામડીનો છેડો ग અક્ષર પાસે જાય એટલે થએલો ખુણો કાટખુણાથી કેટલો મોટો છે એમ પૂછો. કામડીનો છેડો ङ સ્થળે આવતા સુધીમાં જો એક કાટખુણો થાય છે, તો છેડો તેટલોજ આગળ ગયાથી કેટલા કાટખુણા જેવડો ખુણો થશે ?

એક કાટખુણો કરવા માટે વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને બીજી કામડીના છેડાને ફરવું પડે છે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી અર્ધો કાટખુણો થશે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી દોઢ કાટખુણો થશે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી બે કાટખુણા થશે ? ... વગેરે.

સૂચના—હવે પછીનો ભાગ શીખવતા પહેલાં વર્તુળ, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, પરિધ, ત્રિજ્યા, કૌંસ, જ્યા વગેરે સંજ્ઞાઓની માહીતી છોકરાઓને આપવી. આ પારિભાષિક શબ્દોની વ્યાખ્યાઓ આગળથી મોઢે કરાવી લેવાની જરૂર નથી. છોકરાઓ તેમનો અર્થ સમજે, અને તે તે આકૃતિઓને તેમનાં ખરાં નામ વડે બતાવી શકે, એટલે બસ છે.

વ્યાખ્યા.

જે આકૃતિની હદ એકજ અખંડ વક્ર લીટીથી દર્શાવાય છે, અને જેમાં એક એવું બિંદુ હોય છે કે તેમાંથી તે વક્ર લીટી સુધી ગમે તેટલી સીધી લીટીઓ દોરી હોય તોપણ તે બધી સરખી થાય છે, તે આકૃતિને **વર્તુળ** કહે છે.

વર્તુળની હદ દેખાડનાર વક્ર લીટીને તેનો **પરિધ** કહે છે.

પરિધના કોઈ પણ ભાગને **કૌંસ** કહે છે.

વર્તુળના જે બિંદુમાંથી પરિધ સુધી દોરેલી સીધી લીટીઓ બધી સરખી હોય છે તેને વર્તુળનું **મધ્યબિંદુ** કહે છે.

મધ્યબિંદુથી પરિધ સુધી દોરેલી કોઈ પણ સીધી લીટીને **ત્રિજ્યા** કહે છે.

ખુણાઓનું નાનામોટાપણું.

ઉપલા પ્રયોગમાંની કામડીથી અર્ધો કાટખુણો કરો. પછી બંને કામડીઓને છેડે બીજી કામડીઓ બાંધીને ખુણાની બાજુઓ લાંબી કરો. આ ખુણો પહેલાંના ખુણા કરતાં મોટો છે કે? પહેલાંનો ખુણો કેવડો છે? વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને પહેલાં બીજી કામડીનો છેડો ફર્યો હતો? હવે કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો છે? "એક અષ્ટમાંશ." આ ઉપરથી આ ખુણો પહેલાંના ખુણા જેવડોજ છે એમ સમજાય છે.

આ ખુણો મોટો કરવો હોય તો શું કરવું જોઈએ? "છેડો આગળ ખસેડવો જોઈએ." ખુણાની બાજુ વધારે લાંબી કરવાથી ખુણો મોટો થશે કે? "ના."

આ (પાસેની આકૃતિમાં બતાવેલી) કામડીઓ અર્ધો કાટખુણો કરે છે. તેમનો જમણી બાજુનો અર્ધો ભાગ કાપી નાખ્યો હોય, તો ખુણામાં કંઈ તફાવત પડશે કે? "ના." આ ખુણો નાનો કરવો હોય તો શું કરવું જોઈએ? ખુણો નાનો કરી જુઓ અને પછી સવાલનો જવાબ આપો. "ફરતી કામડીનો છેડો પાછળ ખસેડવો જોઈએ."

પરિમાણમાં સરખા છતાં પણ જેમની બાજુઓ નાની મોટી છે એવા બે ખુણા પાટીઆ પર દોરો, અને તે પૈકી કયો ખુણો મોટો છે તે છોકરાઓને પૂછો; એટલે લાંબી બાજુઓવાળો ખુણો મોટો છે એમ છોકરા કહેશે. પછી ખુણાની એક બાજુ પર વિભાજકની એક બાજુ (તેમનાં શિરોબિંદુઓ એક બીજા પર આવે એવી રીતે) મૂકીને તે ખુણા જેટલો ખુણો થતા સુધી વિભાજકની બીજી બાજુ ખસેડો. પછી આ વિભાજક બીજા ખુણા પર તેવીજ રીતે મૂકીને બંને ખુણા સરખા છે એમ બતાવો, અથવા આ વિ-

ભાજક, ઉપર કહેલા (૨૪મા પાના પરના) ચક્ર ઉપર મૂકીને તેથી વર્તુળનો કેટલામો ભાગ દર્શાવાય છે તે જોવાને છોકરાઓને કહો. પછી વિભાજક બીજા ખુણા પર મૂકીને પહેલાંની માફકજ કૃતિ કરો. બે ખુણામાં કંઈ તફાવત છે કે? "ના."

એકથી બીજો જરા મોટો હોય એવા બે ખુણા લો. તે પૈકી નાના ખુણાની બાજુઓ મોટા ખુણાની બાજુઓ કરતાં લાંબી લો. આ બેમાં મોટો ખુણો કયો? જેની બાજુ લાંબી છે તે ખુણો મોટો એમ કદાચ છોકરા કહે, તો પછી ઉપર પ્રમાણે કૃતિ કરીને ખરેખરો મોટો ખુણો કયો તે છોકરા-ઓની પાસે કઢાવો.

આ ઉપરથી ખુણાઓનું નાનામોટાપણું શા પર આધાર રાખે છે, તે સમજાય છે? તે બાજુઓની લંબાઈ પર આધાર રાખે છે કે? "ના."

अबक ખુણો બનાવવા માટે **बक** નો **ब** છેડો વર્તુળના $\frac{1}{?}$ ભાગમાં થઈ જતા સુધી ફેરવવો પડ્યો, તો તેવડોજ બીજો **डईफ** ખુણો કરવા માટે **ईफ** નો **फ** છેડો વર્તુ-ળના કેટલામા ભાગમાં થઈને જતા સુધી ફેરવવો પડશે? આ ઉપરથી બે ખુણા સરખા છે એમ ક્યારે કહેવાય, એ વિષે કોઈ નિયમ કહી શકાય છે કે?

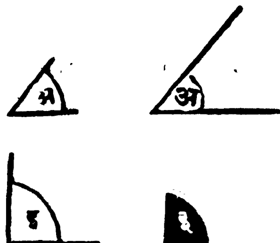
"જ્યારે બે ખુણાની બાજુઓ વર્તુળના સરખા ભાગમાં થઈને ફરેલી હોય છે, ત્યારે તે ખુણા સરખા છે એમ કહેવાય છે."

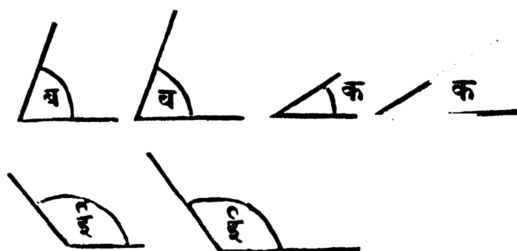
ખુણાઓનું સરખાપણું અથવા નાનામોટાપણું નક્કી કરવાની રીતઃ—

એક ખુણો ઉપાડીને બીજા પર મૂક્યો હોય, ત્યારે જો તે બીજા પર બરાબર આવી રહે, એટલે જો તે બંનેનાં શિરો-

બિંદુઓ અને બાજુઓ એક એક પર બરાબર પડે, તો તે સરખા છે એમ જાણવું.

ખુણાનું નાનામોટાપણું, જે લીટીઓ, કામડીઓ, કે બાજુઓ મળવાથી તે ખુણો બને છે, તેમની લંબાઈ પર આધાર ન રાખતાં તેમના ઓછાવત્તા પરિવર્તન પર (કુંડાળામાં ફરવા પર) આધાર રાખે છે. ખુણાની બાજુઓની વચ્ચે જે જગ્યા હોય છે, તેના નાનામોટાપણાની સાથે ખુણાના સરખાપણાનો કે નાનામોટાપણાનો બીલકુલ સંબંધ





નથી, એ ધ્યાનમાં રાખવું. દાખલા તરીકે, આપેલી આકૃતિઓમાં સમાન અક્ષરે બતાવેલા ખુણા સરખા છે એમ જાણવું.

કાટખુણો.

એક કાગળનો ચોરસ લઈને તેને બરાબર મધ્ય ભાગ ઉપર આડો વાળો. પડેલી ઘડીની ધારના બે ભાગો એક બીજા પર બરાબર આવે એવી રીતે ફરીથી કાગળને મધ્ય ભાગ પર વાળો. એવી રીતે વાળવાથી જે ખુણો થાય છે, તે પહેલાં દેખાડેલા કાટખુણાની બરાબર હોય છે, એ છોકરાઓને બતાવો. પછી એક ઘડી ઉઘાડીને બે કાટખુણા દેખાડો; અને

પછી બીજી ઘડી ઉઘાડીને કાગળની વચ્ચેાવચ બનેલા ચાર કાટખુણા દેખાડેા. નિશાળમાંની વસ્તુએાના ખુણા બતાવીને તેમાંના કયા ખુણા કાટખુણાની બરેાબર છે, અને કયા કાટખુણાથી નાના કે મેાટા છે, એ પૂછેા.

કાગળનેા વર્તુળાકાર કકડેા લઈને ઉપલેા પ્રયેાગ કરેા, અને આ તથા પહેલાંના પ્રયેાગ પરથી કાટખુણાની વ્યાખ્યા નીચે આપ્યા પ્રમાણે છેાકરાએાને મેાઢેથી કઢાવેા.

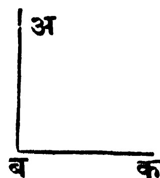
કાટખુણાની વ્યાખ્યા—એક લીટી પર બીજી લીટી પડી હેાય ત્યારે તે (બીજી) લીટીની બંને બાજુના ખુણા સરખા થાય, તેા તેમાંથી દરેક ખુણાને **કાટખુણેા** કહે છે.

અથવા, ખુણાની બાજુએાના છેડાએાની વચ્ચે વર્તુળના એક ચતુર્થાંશની બરાબર અંતર હેાય છે (ખુણાની બાજુએાના બે છેડા મળીને વર્તુળના એક ચતુર્થાંશ ભાગમાં થઈને ફરે છે) ત્યારે કાટખુણેા થાય છે.

ઉપર કાટખુણાનેા જે ખ્યાલ આપ્યેા છે, તે પરથી બધા કાટખુણા સરખા હેાય છે એ જણાઈ આવશે.

ચાર પાંચ કાટખુણા લેા. તેમનાં શિરેાબિંદુએા અને બાજુએા એક એક પર બરાબર પડે, એવી રીતે તેમને એક બીજા પર મૂકેા; એટલે સઘળા કાટખુણા સરખા હેાય છે એ જણાઈ આવશે.

એક લીટી બીજીની સાથે કાટખુણેા કરતી હેાય, તેા તે એમાંની દરેક, બીજી પર લંબ છે એમ કહેવાય છે. દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિમાં **अब, बक** પર લંબ છે, અને **बक, अब** પર લંબ છે.



કાગળ વાળીને આપેલી લીટી પર લંબ કાઢવાની રીતઃ—

પ્રયેાગ—કાગળનેા ગમે તેટલા કદનેા કકડેા લેા. તેની

ગમે તેમ ઘડી વાળો. આ ઘડીની ધારના ભાગ એક બીજા પર બરાબર પડે એવી રીતે ફરીથી કાગળ વાળો. કાગળ ઉઘાડી જુઓ. પહેલી ઘડીની સાથે બીજી ઘડી કેટલો મોટો ખુણો કરે છે? "કાટખુણો." આ પરથી કાગળ વાળીને કોઈ લીટી પર લંબ કાઢવા માટે તમે કઈ રીત શીખ્યા? "......"

આપેલી લીટીની બહારના બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર લંબ કાઢવા માટે ઉપલી રીતનો ઉપયોગ તમે શી રીતે કરશો? "આપેલા બિંદુમાંથી કાગળ એવી રીતે વાળવો કે વાળવાથી પડતા આપેલી લીટીના ભાગ એક બીજા પર પડી રહે."

બીજી રીત:—अब આપેલી લીટી છે. **क** આપેલું બિંદુ છે. **अब** ઉપર કાગળ વાળો. એમ વાળતાં **क** બિંદુ **अब**ની બીજી બાજુના કાગળના ભાગને જ્યાં સ્પર્શ કરે ત્યાં પેન્સિલથી, કે **क**માં વિભાજકની અણી ખોસીને, **ड** બિંદુ કરો; અને **कड** સાંધો.

પ્રશ્ન.

૧. કાગળના કકડા પર એક બિંદુ લો, અને કાગળ વાળીને તે બિંદુ આગળ કાટખુણો બનાવો. એવા કાટખુણા બધા મળીને કેટલા થાય છે? "ચાર."

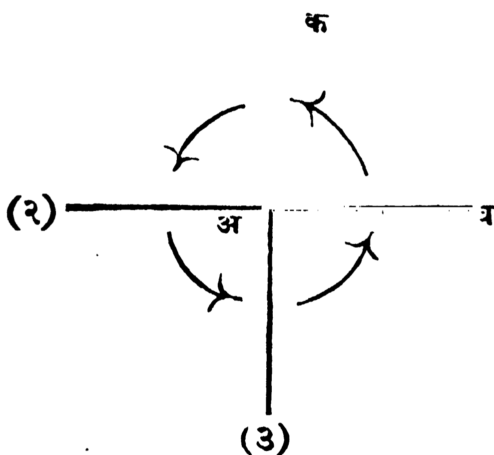
સૂચના—ઘડિઆળ સંબંધી નીચેના બધા પ્રશ્નોમાં ઘડિઆળના બંને કાંટા સ્વતંત્ર છે, એટલે એક કાંટો ફેરવ્યો હોય તોપણ બીજો ફરતો નથી, એમ ધારવું.

૨. ઘડિઆળના બંને કાંટા ત્રણ પર છે; તેમાંથી એક કાંટો ઉલટો ફેરવીને ૧૨ પર આણ્યો હોય, તો તે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો થશે, તે કાટખુણાથી નાનો થશે કે મોટો?

૩. એક કાંટો ૯ પર અને બીજો બરાબર ૩ પર છે, તો તે બે કાંટા વચ્ચેનો ખુણો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે?

બિંદુની આસપાસ થતા ખુણાઓનો સરવાળો.

પાસેની આકૃતિમાં **अक** સળીનો છેડો (૧)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં આવે ત્યારે જો **अब, अक** વચ્ચે એક કાટખુણો થાય, અને **अक**નો છેડો (૨)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં આવે ત્યારે જો **अब, अक** વચ્ચે બે કાટખુણા થાય, તો **अक**(૩)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં જાય ત્યારે **अब, अक** વચ્ચે જે ખુણો થાય, તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય? **अक** સળી (૩)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાંથી નીકળીને બાણની દિશામાં જઈ આખરે **अब** પર પડે, તો **अक** સળી જે ખુણામાં થઈને ફરી, તે ખુણો કેટલા કાટખુણા બરાબર થયો?



પહેલાં કહ્યા પ્રમાણે કાગળ વાળીને કાટખુણો તૈયાર કરો. જે બિંદુમાં બંને સળો એક બીજાને છેદે છે, તે બિંદુની પાસે કેટલા કાટખુણા થાય છે?

ઉપલા બે પ્રયોગ ઉપરથી, એક લીટી પોતાના એક છેડાના બિંદુની આસપાસ ફરતી ફરતી એક પ્રદક્ષિણા કરીને અસલની જગાએ આવે છે, એટલે તે કેટલા કાટખુણામાં થઈને ફરી આવે છે? "તે ચાર કાટખુણામાં થઈને ફરી આવે છે."

એક બિંદુમાંથી જુદી જુદી દિશાઓમાં લીટીઓ દોરી

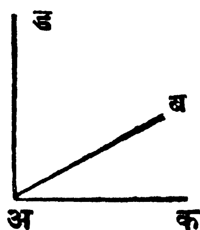
હોય, તો તેમની વચ્ચે જે ખુણા થાય છે તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે ઉપલા પ્રયોગ પરથી તમે શું શીખ્યા?

વ્યાખ્યા.

કાટખુણાથી નાના ખુણાને **સાંકડો ખુણો** કહે છે.

કાટખુણાથી મોટા ખુણાને **પહોળો ખુણો** કહે છે.

જે બે ખુણા મળીને એક કાટખુણો બને છે તેમને એકબીજાના **કોટિખુણા** કહે છે. આપેલી આકૃતિમાં **डअब** અને **बअक** એક બીજાના કોટિખુણા છે.

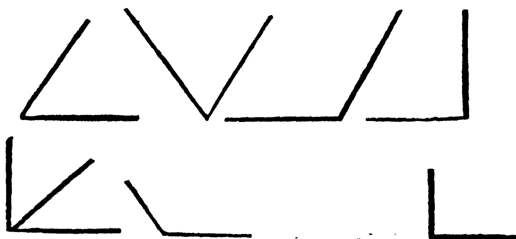


જે બે ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, તેમને એક બીજાના **ન્યૂનતાપૂરક** ખુણા કહે છે. આપેલી આકૃતિમાં **कअब** અને **बअड** એક બીજાના ન્યૂનતા-પૂરક ખુણા છે.



ખુણાના પ્રકાર.

નીચેના ખુણામાંથી સાંકડા ખુણા કયા, પહોળા ખુણા કયા, અને કાટખુણા કયા તે કહો.

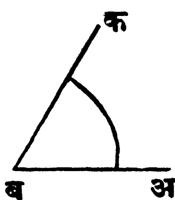


નીચે કેટલીક ખુણાઓની જોડો આપી છે, તેમાંથી કોટિખુણા કયા અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણા કયા તે કહો.



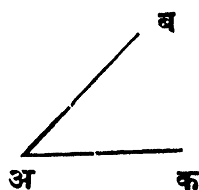
ખુણાઓના સંબંધમાં પરિભાષા.

જે બે લીટીઓ મળીને ખુણો થાય છે, તેમને તે ખુણાના **ભુજ** કે બાજુ કહે છે. પાસેની આકૃતિમાં **बक, बअ** તે ખુણાના **ભુજ** છે.



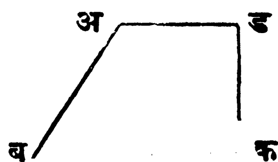
ખુણાના ભુજ એક બીજાને જે બિંદુમાં મળે છે, તે બિંદુને તે ખુણાનું **શિરોબિંદુ** કહે છે. પાસેની આકૃતિમાં **ब** શિરોબિંદુ છે.

ખુણાનું નામ કહેતી વખતે શિરોબિંદુની પાસેનો અક્ષર વચ્ચે, અને તેની બે બાજુએ ખુણાની બે બાજુના છેડાની પાસેના અક્ષર મૂકવાનો રિવાજ છે. દાખલા તરીકે, પાસે આપેલા ખુણાને **बअक** કે **कअब** ખુણો કહે છે.



કોઈ પણ આકૃતિનું નામ આપવાની સામાન્ય રીત એવી છે, કે તેના કોઈ પણ એક ખુણાથી કે છેડાથી શરૂ કરીને તેની આસપાસ ડાબી બાજુએ થઈને પ્રદક્ષિણા કરતાં, પ્રદક્ષિણા પુરી થતા સુધી તેના ખુણા જે ક્રમે આવે તે ક્રમે તેના ખુણા પાસેના અક્ષરો ઉચ્ચારવા. તેથી બધી બાજુએ ઘેરાએલી આકૃતિઓનાં નામ ઘણી રીતે આપી શકાય છે.

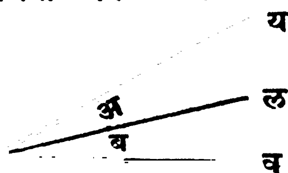
દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિ **अबकड, बकडअ,**



कडअब, डअबक આ ચાર નામથી દર્શાવી શકાય છે. પણ ખુણાને ત્રીજી બાજુએ હદ હોતી નથી, તેથી તેની બાજુના છેડાનાં નામ દઈને તે બેજ રીતે દર્શાવી શકાય છે.

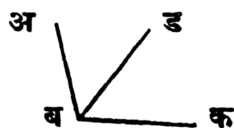
આકૃતિની આસપાસ જમણી બાજુએથી પ્રદક્ષિણા કરીને પણ કોઈ કોઈ વખત આકૃતિ દર્શાવાય છે. દાખલા તરીકે, ઉપલી આકૃતિ **अडकब, डकबअ, कबअड, बअडक** આ ચાર નામમાંથી ગમે તે નામથી દર્શાવી શકાય.

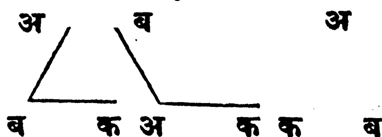
કોઈ કોઈ વખત ખુણામાં લખેલા ગમે તે કોઈ એક અક્ષર વડે ખુણો દર્શાવવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિમાં **अ** ખુણો એટલે **यरल** ખુણો, અને **ब** ખુણો એટલે **लरव** ખુણો.

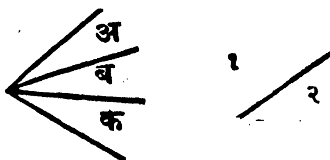


ખુણો એ શબ્દને બદલે ∠ આ ચિહ્ન કરવાનો રિવાજ છે; જેમકે ∠**अबक** એટલે **अबक** ખુણો; ∠**अ** એટલે **अ** ખુણો; ∠**અ** એટલે **અ** ખુણો............વગેરે.

પાસેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે જ્યારે બે ખુણા એક બીજાને અડકેલા હોય છે, ત્યારે તેમને **પાસપાસેના** કે **પાસેના** ખુણા કહે છે. આ આકૃતિમાં **अबड** અને **डबक** એ પાસપાસેના ખુણા છે. **अबक** ખુણાને **अबड** અને **डबक** નો સરવાળો કહે છે.







ઉપલી આકૃતિઓમાં ખુણા આપ્યા છે, તેમને અક્ષરોથી દર્શાવો. તેમાં કયો ખુણો કયા ખુણાને અડકેલો છે તે કહો.

ખુણાઓની સરખામણી.

બે ખુણામાંથી કયો ખુણો મોટો છે તે જોવાની રીત:—

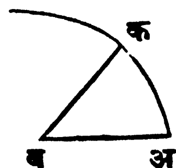
એક ખુણાનો છાપો * ટિશુપેપરથી, ટ્રેસિંગપેપરથી, કે તેલીઆ કાગળથી લેવો; અથવા તે ખુણા જેવડો ખુણો દોરીને+ તે કાપી કાઢવો. પછી તે ખુણો બીજા ખુણા પર

---

* છાપો કે છાપ—આકૃતિ પર ટિશુપેપર રાખીને કરેલી નકલને છાપો કે છાપ કહે છે.

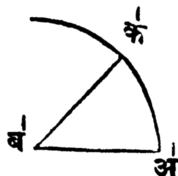
+ આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો દોરવાની રીત:—જો अबक ખુણાની પ્રતિમા લેવી હોય, તો તે ખુણા નીચે બીજો કાગળ રાખવો; અને ખુણાના अ, ब, क, બિંદુઓમાં ટાંકણી ખોસવી. નીચેના કાગળમાં જે કાણાં પડે તેમને અનુક્રમે अं, बं, कं, નામ આપીને अंबं, बंकं સાંધવાં. अंबंकं ખુણો अबक ખુણા બરાબર છે એમ જણાઈ આવશે.

કોણમાપકની મદદ વગર આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કાઢવાની બીજી રીત:—આપેલો ખુણો अबक, बक લીટીના પરિવર્તનથી બનેલો છે. ब મધ્યબિંદુ ધારીને बअ ત્રિજ્યાએ વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળના ફક્ત अक ભાગમાં થઇને बक ફરી છે; માટે अबक જેટલો ખુણો કાઢવો હોય તો સરખા



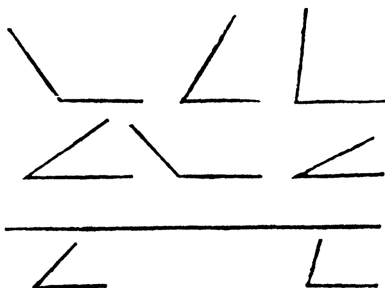
મૂકીને કયો ખુણો મોટો છે તે જોવું. એક ખુણાને બીજા પર મૂકતી વખતે શિરોબિંદુ શિરોબિંદુ પર અને એક ખુણાનો એક ભુજ બીજા ખુણાના એક ભુજ પર રાખવો. પછી ઉપલા ખુણાનો બીજો ભુજ નીચેના ખુણાની અંદર કે બહાર પડે તે પ્રમાણે ઉપલો ખુણો નાનો કે મોટો તે નક્કી કરવું.

પાસે કેટલીક ખુણાની જોડો આપેલી છે, તેમાંથી દરેક



વર્તુળના તેટલા ભાગમાં થઈને ખુણાનો ભુજ ફેરવ્યો એટલે બસ. તેટલા માટે બઅ જેટલી બીજી બ'અ' લીટી દોરો. બ' મધ્યબિંદુ ધારીને બ'અ' ત્રિજ્યાએ બીજું વર્તુળ દોરો. અક કૌંસનું અંતર વિભાજકથી માપો, અને તે વિભાજક વડે તેટલોજ મોટો ભાગ બીજા વર્તુળમાંથી કાપી કાઢો. ધારો કે એ ભાગ અ'ક' છે. બ'ક' સાંધો. અ'બ'ક' ખુણો આપેલા ખુણાની બરાબર હોવો જોઈએ એ ખુલ્લું છે.

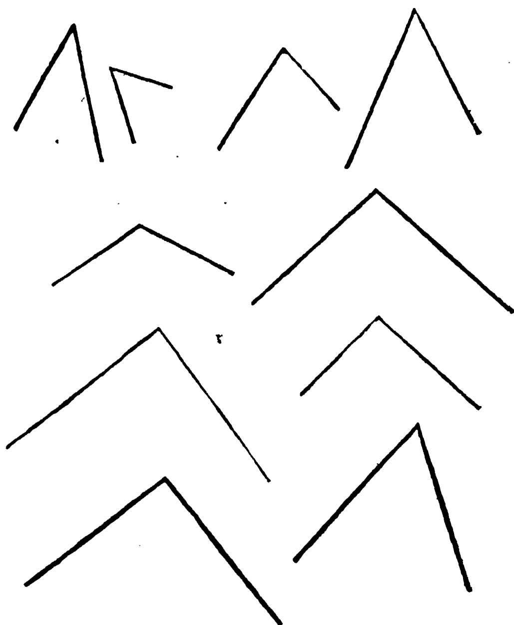
નીચે આપેલા ખુણા જેવડા ખુણા દોરો.



પાસે આપેલી લીટી જેવડી લીટી દોરીને તેના બે છેડા આગળ, આપેલા બે ખુણા જેવડા ખુણા કરો.

જોડમાંનો કયો ખુણો મોટો અને કયો નાનો તે નક્કી કરો.

(પહેલાં, આપેલા ખુણામાંથી કયો મોટો છે તે અટકળથી નક્કી કરો, અને પછી ઉપર આપેલી રીતે સરખામણી કરીને તમારો જવાબ ખરો છે કે નહિ તે જુઓ.)



નાની મોટી બાજુવાળા ચારપાંચ કાટખુણા હાથે દોરો; તેમજ સાંકડા ખુણા અને પહોળા ખુણા દોરો.

ખુણાના વિભાગ અને ખુણા માપવાની રીત.

જેનો એક ખુણો કાટખુણો હોય એવો કાગળનો કકડો લઈને કાટખુણાનો એક ભુજ બીજા પર પડે એવી રીતે તેને વાળો. કાટખુણાના કેટલા ભાગ પડ્યા? "બે." બે ભાગ સરખા છે કે નાના મોટા? "સરખા." એમાંથી દરેક ખુણો કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ છે? "અર્ધો." આ ખુણાને ફરીથી વાળીને તેના બે સરખા ભાગ કરો. દરેક ખુણો કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ છે? "એક ચતુર્થાંશ."

જેમ ફુટના બાર સરખા ભાગ કરીને દરેક ભાગને ઇંચ

એ નામ આપ્યું છે, તેમ એક કાટખુણાના ૯૦ સરખા ભાગ કલ્પીને દરેક ભાગને અંશ એવું નામ આપેલું છે. (કોણમાપક પરના કાટખુણાના ભાગ દેખાડવા.)

ખુણાનું નાનામોટાપણું ખુણાની બાજુઓની વચ્ચેના વર્તુળભાગના નાનામોટાપણા પર આધાર રાખે છે. એટલા માટે વર્તુળના પરિધના ૩૬૦ અંશ કે સરખા ભાગ કરીને આ દરેક ભાગ ઉપરથી બીજા બધા ખુણા માપવાનો રિવાજ છે. ખુણા માપવાનું અંશથી મોટું માપ કાટખુણો છે. [પૃથ્વી સૂર્યની આસપાસ પ્રદક્ષિણા કરતી વખતે રોજ વર્તુળના ૩૬૦મા ભાગમાં થઈને જાય છે; આ ઉપરથી વર્તુળનો ૩૬૦મો ભાગ ખુણો માપવા માટે લેવાનો રિવાજ પડી ગયો હોય એમ લાગે છે.]

[અંશ એ શબ્દને ઠેકાણે ° આ ચિહ્ન વાપરે છે; જેમકે:— ૧૦° એટલે દસ અંશ; ૨૨° એટલે ૨૨ અંશ.]

પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણામાં ૯૦ અંશ હોય છે; તો અર્ધા કાટખુણામાં કેટલા? પા કાટખુણામાં કેટલા? $\frac{3}{4}$ કાટખુણામાં કેટલા?

૨. ઘડિઆળમાં બરાબર એક વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો હોય છે, તે કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ હોય છે? તે ખુણામાં અંશ કેટલા?

૩. ઘડિઆળમાં બરાબર બે વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો થાય છે, તે કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ? તે ખુણામાં અંશ કેટલા?

૪. ઘડિઆળમાં ૫, ૬, ૭, ૮, ૯......વગેરે વાગે છે ત્યારે બે કાંટા વચ્ચેનો ખુણો કેટલા અંશનો હોય છે?

૫. નીચેની દિશાઓની વચ્ચે કેટલા અંશના ખુણા થાય છે તે કહોઃ—પૂર્વ અને પશ્ચિમ, પૂર્વ અને દક્ષિણ, દક્ષિણ અને નૈર્ઋત્ય, પશ્ચિમ અને ઈશાન, વાયવ્ય અને અગ્નિ, ઉત્તર અને ઈશાન–પૂર્વ,* વાયવ્ય–ઉત્તર અને પૂર્વ.....વગેરે.

ખુણા માપવાની રીત.

કોણમાપકના ઉપયોગના સંબંધમાં સૂચના—જે ખુણો માપવો હોય તેના શિરોબિંદુ પર કોણમાપકનું મધ્ય-બિંદુ (એટલે સીધી ધારના મધ્યભાગ પરની ખાંચ) રાખીને ખુણાની એક બાજુ પર કોણમાપકની એક બાજુ મૂકવી; અને ખુણાની બીજી બાજુ કોણમાપકના જે અંશની નિશાની નીચે થઈ જતી હોય, તેટલા અંશનો તે ખુણો છે એમ સમજવું.

ખુણાની ડાબી બાજુ પર કોણમાપકની ડાબી બાજુ મૂકી હોય, તો ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ તરફ વધતા જતા કોણમાપક પરના આંકડા ઉપરથી ખુણાના અંશ જાણવા; અને ખુણાની જમણી બાજુ પર કોણમાપકની જમણી બાજુ મૂકી હોય, તો જમણી બાજુથી ડાબી બાજુ તરફ વધતા જતા કોણમાપક પરના આંકડા ઉપરથી ખુણાના અંશ સમજવા. તેમ છતાં પણ કયા આંકડાનો ઉપયોગ કરવો એ વિષે ગુંચવણ ન પડે એટલા માટે, ખુણાની જમણી બાજુ પર કોણમાપકની જમણી બાજુ મૂકવાની હંમેશ ટેવ રાખવી એ સારૂં છે.

ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો છે, તે પહેલાં અટકળથી જોવું; એટલે ખુણો માપતાં કોણમાપક પરના આંકડા ખોટી બાજુએથી ગણવામાં આવ્યા હોય, તો થએલી ભૂલ જણાઈ આવશે.

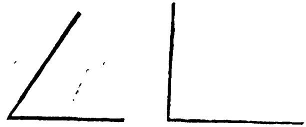
---

* ઈશાન ને પૂર્વની બરાબર વચ્ચેની દિશા.

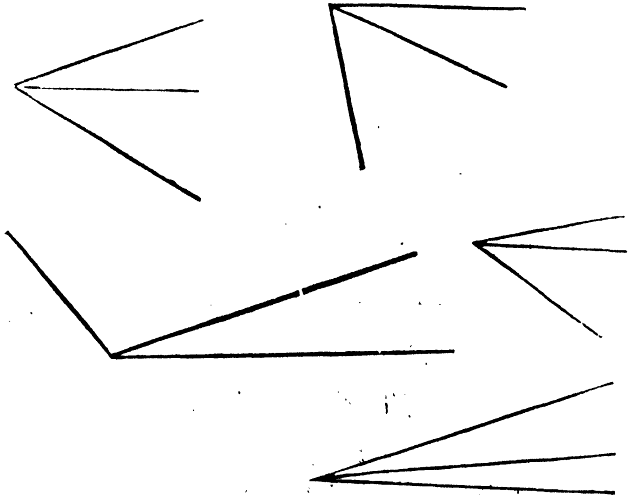
પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણમાપના ખુણા કેટલા અંશના છે તે જુઓ.

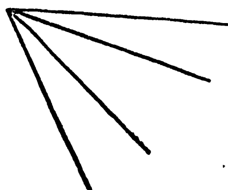
૨. નીચે આપેલા ખુણા માપો, અને તે કેટલા અંશના છે તે કહો.

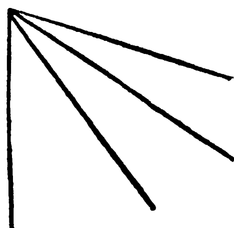


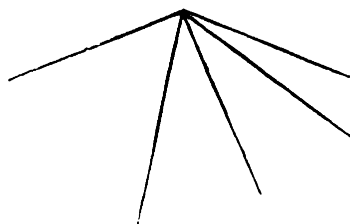
૩. નીચે આપેલા પાસ પાસેના ખુણામાંનો દરેક ખુણો માપો; અને બંને ખુણાનો સરવાળો કરો. પછી આખો ખુણો માપો, અને તે પરથી પહેલાંના જવાબ ખરા છે કે કેમ તે જુઓ.

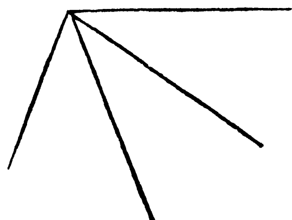


૪. ઉપર પ્રમાણેજ નીચે આપેલા ખુણાના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. (બે જવાબમાં એક અંશનો તફાવત પડે તો તે દરગુજર કરવામાં હરકત નથી.)









૫. એક વર્તુળ દોરો, અને તેના પરિઘના તમારી તરફના ભાગ પર કેટલાંક, અને તમારાથી આઘેના ભાગ પર કેટલાંક, એવી રીતે બધાં મળીને ગમે તે પાંચ બિંદુ લો. આ બિંદુઓમાંથી વર્તુળના મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરો, અને તેથી થતા એક પછી એક પાંચ ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. આ ઉપરથી વર્તુળમાં કેટલા કાટખુણા હોવાનું જણાઈ આવે છે?

૬. એક વર્તુળ દોરો અને કંપાસ વડે તેના પરિઘના ચાર–પાંચ સરખા ભાગ પાડો. આ ભાગોનાં છેદનબિંદુઓમાંથી* વર્તુળના મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓની

---

* છેદનબિંદુ—કોઈ પણ સીધી કે વાંકી લીટીને જે બિંદુમાં છેદવામાં આવે છે, તે બિંદુને છેદનબિંદુ કહે છે.

વચ્ચેના ખુણા માપો, અને તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું માલમ પડયું? "તે સરખા છે."

૭. ગમે તેવા ખુણા દોરો અને તેમના અંશ અટકળથી નક્કી કરો. પછી કોણમાપક વડે ખુણા પ્રત્યક્ષ માપીને તમારી અટકળ કેટલે દરજ્જે ખરી છે તે જુઓ. ખુણા સાધારણ રીતે બરાબર માપતાં આવડે ત્યાંસુધી અભ્યાસ જારી રાખો. (અટકળથી માપવામાં ૫ અંશનો તફાવત પડે ત્યાંસુધી ચાલે.)

ખુણો દુભાગવાની રીત (કાગળની ઘડી વાળીને):– આપેલા ∠**અબક** જેવડો ખુણો દોરો, અને તેને કાપી કાઢો. **અબ, બક** પર બરાબર પડે એવી રીતે કાગળ વાળો. વાળવાથી ખુણાના જે બે ભાગ થાય છે, તે એક બીજાની બરાબર છે એમ જણાઈ આવશે.

[આ પછીનો ભાગ શીખવતા પહેલાં કૌંસ, પરિઘ, જ્યા, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, એ સંબંધી જે માહીતી પહેલાં આપેલી છે તેનું પુનરાવર્તન કરાવવું.]

બીજી રીત:—આપેલા **અબક** ખુણાનું **બ** મધ્યબિંદુ અને ગમે તે ત્રિજ્યા લઈને **અબ, બક**ને અનુક્રમે **ડ** તથા **ઈ**માં છેદે એવો કૌંસ દોરો. **ડ, ઈ** મધ્યબિંદુ અને **ડઈ** જેટલી ત્રિજ્યા લઈને **ફ**માં એક બીજાને છેદે એવા કૌંસ દોરો. **ફબ** સાંધો. **ફબ** આપેલા ખુણાને દુભાગે છે.

૮. કેટલાક ખુણા લઈને તેમને ઉપર કહેલી રીતે દુભાગો, અને તેમના વિભાગ કોણમાપકથી માપીને તે બરાબર છે કે નહિ તે જુઓ.

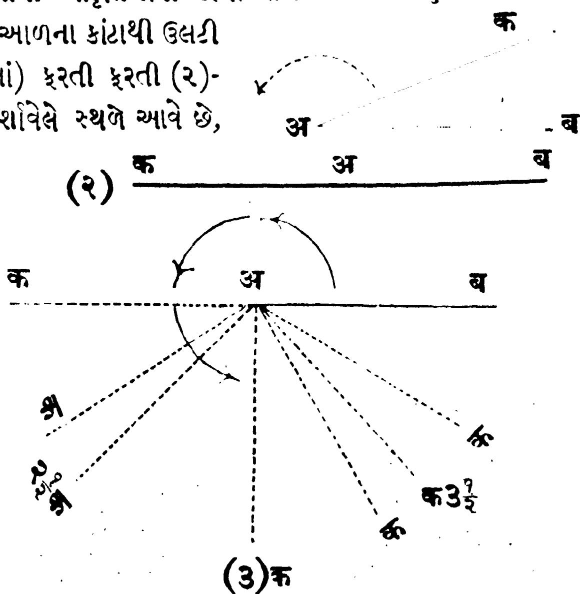
કૌંસ દુભાગવાની રીત:—અબ આપેલો કૌંસ છે. **અબ**નો છાપો લો. **અ, બ** પર પડે એવી રીતે ઘડી વાળો. ઘડીથી **અબ**ના જે બે વિભાગ થાય છે, તે એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે; તે પરથી તે સરખા છે એ સ્પષ્ટ થાય છે.

બીજી રીત:—એક **अब** કૌંસ લો. **अ** મધ્યબિંદુ અને **अब**ના અર્ધથી જરા મોટી ત્રિજ્યા લઈને એક કૌંસ દોરો. તેટલીજ ત્રિજ્યા અને **ब** મધ્યબિંદુ લઈને આ કૌંસને **क** અને **ड**માં છેદે એવો બીજો કૌંસ દોરો. **कड** સાંધો. **अब** કૌંસને **कड** દુભાગે છે.

૯. એક વર્તુળ દોરો. તેમાં ગમે તે એક **अब** કૌંસ લો. **अब** કૌંસને **क** બિંદુમાં દુભાગો. વર્તુળના મધ્યબિંદુ **म**ને **अ,ब,क**ની સાથે સાંધો. **अमक** અને **बमक** ખુણા માપો અને તેમને સરખાવો. બીજા કૌંસ લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો. આ ઉપરથી વર્તુળના મધ્યબિંદુ આગળ થતા ખુણા અને તે ખુણાની બાજુઓની વચ્ચેના કૌંસોની વચ્ચે શો સંબંધ હોવાનું જણાઈ આવે છે?

બહિર્વક્ર કોણ.

પાસેની આકૃતિમાંની **अक** સળી જ્યારે બાણની દિશામાં (ઘડિઆળના કાંટાથી ઉલટી દિશામાં) ફરતી ફરતી (૨)-થી દર્શાવેલે સ્થળે આવે છે,

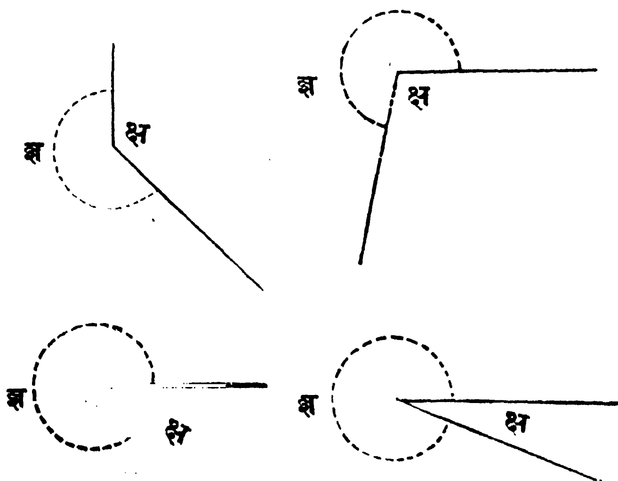


ત્યારે તે **અબ**ની સાથે બે કાટખુણા કરે છે. હવે જો તેજ સળી, વળી આગળ ફરતી ફરતી (૩)થી દર્શાવેલે સ્થળે આવશે, તો તે **અબ** સાથે જે ખુણો કરશે તે બે કાટખુણાથી મોટો થશે.

આ પ્રમાણે **અક** સળી (૨)થી દર્શાવેલા સ્થળ આગળથી શરૂ કરી બાણની દિશામાં ફરતાં ફરતાં પાછી **અબ** ઉપર જઈ પડે ત્યાંસુધીમાં **અબ** સાથે જે ખુણા કરશે, તે **બે કાટખુણાથી મોટા અને ચાર કાટખુણાથી નાના થશે. એવા ખુણાને બહિર્વક્ર ખુણો** કે **બહિર્વક્રકોણ** કહે છે.

ખુણાનો ફરતો ભુજ સ્થિર ભુજથી શરૂ થતા વર્તુળના અર્ધા ભાગ કરતાં વધારે ભાગમાં થઈને જવાથી જે ખુણો થાય છે, તેને બહિર્વક્રકોણ કહે છે, એમ કહીએ તોપણ ચાલે.

નીચેની આકૃતિઓમાં ટપકાંની લીટીઓથી દર્શાવેલા ખુણા બહિર્વક્રકોણ છે. આ ખુણા ઉલટી દિશામાંથી જોયા હોય તો બહિર્વક્ર દેખાતા નથી એ ઉઘાડું છે.



[ઉપલા ખુણામાંથી કોઈ પણ ખુણો **ક્ષ**ની બાજુથી જોયો હોય, તો તે બે કાટખુણા કરતાં નાનો દેખાય છે; પણ તે **ક્ષ**ની બાજુથી જોયો હોય તો બે કાટખુણા કરતાં મોટો દેખાય છે. **ક્ષ**ની બાજુ પરનો ખુણો **અંતર્વક્ર ખુણો** કહેવાય છે. અર્થાત્, અંતર્વક્ર ખુણો એટલે બે કાટખુણાથી નાનો ખુણો.]

પ્રશ્ન.

૧. ઘડિઆળમાં ૯ વાગે છે ત્યારે કલાકના અને મિનિટના કાંટા વચ્ચે કેટલા અંશનો બહિર્વક્રકોણ થાય છે?

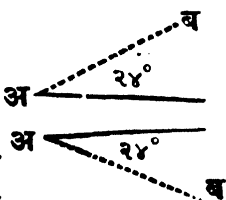
૨. બે કાંટાની વચ્ચેનો બહિર્વક્ર ખુણો અંતર્વક્ર ખુણાથી ત્રણગણો છે; તો તે બહિર્વક્ર ખુણો કેટલો મોટો છે?

૩. ઉપલા પ્રશ્નમાં બહિર્વક્ર ખુણો અંતર્વક્ર ખુણાથી બમણો, ૪ ગણો, ૫ ગણો છે, એમ ધારીને જવાબ કાઢો.

સૂચના—બે લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો માપતી વખતે અંતર્વક્ર ખુણો લેવાનો રિવાજ છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું.

સાપેક્ષ દિશા.

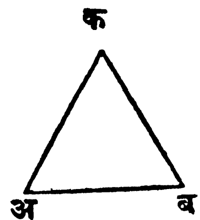
એક સ્થળ બીજા સ્થળની કઈ દિશામાં છે તે જોવાની રીતઃ—ધારો કે **બ** સ્થળ **અ** સ્થળની કઈ દિશામાં છે એ શોધી કાઢવું છે. **બ** સ્થળ મુખ્ય ચાર દિશામાંથી લગભગ કઈ દિશાની પાસે છે એ પહેલાં જોવું. જો તે પૂર્વ તરફ છે એમ લાગે, તો **અ**માં થઈને જાય એવી એક સીધી લીટી બરાબર પૂર્વ તરફ દોરવી. પછી **બ**થી **અ** સુધી લીટી દોરવી, અને આ લીટીનો પૂર્વ તરફ દોરેલી લીટીની સાથે જે ખુણો થાય છે તે ખુણો માપવો. ધારો કે આ ખુણો ૨૪ અંશનો છે. હવે જો **અબ** લીટી પૂર્વ બતાવનારી લીટીથી ઉત્તર તરફ હોય, તો



બની દિશા 'પૂર્વની ઉત્તરમાં ૨૪ અંશ છે' એમ કહેવું; અને **અબ** લીટી પૂર્વ બતાવનારી લીટીની દક્ષિણમાં હોય, તો **બ**ની દિશા 'પૂર્વની દક્ષિણમાં ૨૪ અંશ છે' એમ કહેવું.

પ્રશ્ન.

૧. **अबक** અને **बअक** ખુણા દરેક ૬૦ અંશના છે. હવે જો **अब** લીટી પૂર્વ-પશ્ચિમ હોય, તો **क**, **अ**ની કઈ દિશામાં છે? **ब**ની કઈ દિશામાં છે?



૨. એક માણસ **अ** સ્થળથી નીકળી ચાર માઇલ બરાબર ઉત્તર તરફ જાય છે, અને ત્યાંથી ૪ માઇલ બરાબર પશ્ચિમ તરફ જઈને **ब** સ્થળે પહોંચે છે; તો **ब**, **अ**ની કઈ દિશામાં છે? (એક માઇલ માટે અર્ધો ઇંચ એ સ્કેલ લઈને આકૃતિ દોરો.)

[કોઈપણ સ્કેલ લઈને દોરેલી આકૃતિની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ કાઢો.]

૩. જેની લંબાઈ ૪૦ ફુટ છે અને પહોળાઈ ૨૦ ફુટ છે, એવા **अबकड** લંબચોરસમાં **क**, **अ**ની કઈ દિશામાં છે? **अब** બરાબર પૂર્વપશ્ચિમ છે. (સ્કેલ–૧"=૨૦ ફુટ.)

૪. **ब**ની પશ્ચિમે **अ** ૨·૫ માઇલ છે અને **अ**ની દક્ષિણમાં **क** ૪·૫ માઇલ છે; તો **ब**થી **क** કેટલું આઘું છે અને **ब**ની કઈ દિશામાં છે?

૫. એક માણસ **अ** સ્થળથી ૩ માઇલ બરાબર દક્ષિણ તરફ જાય છે. ત્યાંથી તે બરાબર ઈશાન તરફ ૮ માઇલ

જઈને **ब** સ્થળે પહોંચે છે; તો **अ**થી **ब** કેટલું આઘું છે? અને **अ**ની કઈ દિશામાં છે?

૬. **अ, ब**ની વાયવ્યમાં ૧૭.૫ માઇલ છે; **ब, क**ની ઈશાનમાં ૨૩ માઇલ છે; તો **क, अ**થી કેટલું આઘું છે, અને **अ**ની કઈ દિશામાં છે?

૭. **ब** અને **क** એ સ્થળો **अ**થી બરાબર ૫ માઇલ પર છે; અને તે અનુક્રમે દક્ષિણની પશ્ચિમમાં ૩૬° અને પશ્ચિમની દક્ષિણમાં ૧૮° છે; તો **ब, क**ની કઈ દિશામાં છે, અને તે બેની વચ્ચેનું અંતર કેટલું છે?

૮. **ब** અને **क** સ્થળોની વચ્ચે ૩.૫ માઇલનું અંતર છે, અને **ब, अ**ની બરાબર ઉત્તરમાં છે. **क, ब**ની બરાબર પૂર્વમાં અને **अ**ની બરાબર ઈશાનમાં છે; તો **क**નું **अ**થી અંતર કેટલું?

૯. **अ** અને **ब** બેટોની વચ્ચે ૮૦૦ ફુટનું અંતર છે. **ब, अ**ની બરાબર ઉત્તરે છે. એક વહાણ **ब**થી નીકળીને બરાબર પૂર્વ તરફ ૫ મિનિટ સુધી ગયા પછી તેની દિશા **अ**ની ઉત્તરની પૂર્વમાં ૫૭° અંશ હોવાનું જણાઈ આવે છે; તો તે વહાણ ૫ મિનિટમાં કેટલું અંતર ચાલ્યું, અને તેનો દર કલાકે વેગ કેટલો?

૧૦. એક વિભાજકની બાજુઓની લંબાઈ ૧૦ સે. મી. છે, અને તેમની વચ્ચે ૩૫°નો ખુણો થતા સુધી તે આઘી કરેલી છે; તો વિભાજકની બાજુઓની અણીઓની વચ્ચે કેટલું અંતર છે?

૧૧. એક સીધી વાડથી ૨૦ હાથને અંતરે દાટેલા ખુંટા સાથે એક બકરીને દોરીથી બાંધેલી છે; અને તે બકરી ખુંટાથી ૩૫ હાથ આઘી જઈ શકે એટલી તે દોરી લાંબી છે; તો તે બકરી તે વાડનો કેટલો ભાગ ખાઈ શકશે?

અમુક અંશનો ખુણો કરવા વિષે.

અમુક અંશનો ખુણો દોરવાની રીત:—એક સીધી લીટી દોરવી. તે લીટીના ડાબા છેડા પર કોણમાપકનું મધ્યબિંદુ, અને તે લીટી પર કોણમાપકની જમણી બાજુ બરાબર પડે એવી રીતે કોણમાપક મૂકવો. પછી જેટલા અંશનો ખુણો કરવો હોય, તેટલા અંશ બતાવનારી કોણમાપક પરની લીટીના છેડા પાસે કાગળ પર પેન્સિલથી ઝીણું ટપકું કરવું, અને તે ટપકાથી પહેલી લીટીના ડાબા છેડા સુધી લીટી દોરવી.

(પેન્સિલને બદલે વિભાજકની અણીથી કે ટાંકણીથી આ બિંદુ લીધું હોય તો ખુણો વધારે બરાબર નીકળશે.)

નીચેના અંશના ખુણા કરો:—

(૧) ૩૦, ૬૦, ૪૫, ૧૩૫, ૭૫, ૧૦૦, ૧૨૦.

(૨) ૧૮, ૨૩, ૮૯, ૧૨૫, ૫૭, ૬૪, ૧૧૧, ૧૫૨, ૧૭૮.

૩૦ અંશનો **अबक** ખુણો કરો અને તેમાં ૨૫ અંશનો **कबड** ખુણો ઉમેરો. એવી રીતે બનેલો **अबड** ખુણો માપો, અને તેના અંશ બરાબર ૫૫ થાય છે કે કેમ તે જુઓ. થતા ન હોય તો ભૂલ ક્યાં છે તે ખોળી કાઢો.

अबक અને **कबड** એ ખુણા અનુક્રમે નીચેના અંશના લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો:—

૨૦, ૭૦; ૫૨, ૨૮; ૪૩, ૧૭; વગેરે.

अबक, कबड, डबई ખુણા અનુક્રમે ૧૭, ૨૩, ૩૮ અંશના લો. **अबई** ખુણો માપો, અને તેના અંશ ૭૮ થાય છે કે કેમ તે જુઓ. થતા ન હોય તો પહેલાં માપતી વખતે ભૂલ ક્યાં થઈ તે શોધી કાઢો.

अबक, कबड, डबई એ ખુણા નીચેના અંશના લઈને ઉપર મુજબ પ્રયોગ કરો:—

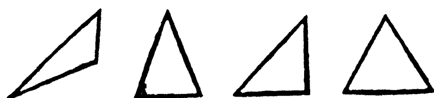
(૧) ૭૦, ૧૨, ૨૮; (૨) ૧૧૬, ૨૦, ૩૪; (૩) ૫, ૧૮, ૧૦૦.

अबक ખુણો ૧૩૦°નો લઈને તેમાંથી ૪૦°, ૩૦°, ૨૫°ના ખુણા કાપી કાઢો. બાકી રહેલો ખુણો ૩૫°નો થાય છે કે નહિ તે જુઓ. ન થાય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

બીજા ખુણા લઈને ઉપલો પ્રયોગ ફરીથી કરો.

નીચેના અંશના ખુણા અટકળથી કાઢો, અને પછી તેમને પ્રત્યક્ષ માપી જુઓ. ખુણા સાધારણ રીતે બરાબર દોરતાં આવડે ત્યાંસુધી અભ્યાસ જારી રાખોઃ—૪૫°, ૨૨·૫°, ૩૦°, ૨૦°, ૬૦°, ૧૦°, ૭૦°, ૮૦°, ૧૨૦°, ૧૩૫°.

પાસેની આકૃતિઓને ત્રિકોણ કહે છે. (ત્રિ=ત્રણ, કોણ= ખુણો. જેને ત્રણ ખુણા હોય એવી આકૃતિ.) આ



આકૃતિઓની માફક જે આકૃતિઓની હદ ત્રણ સીધી લીટીઓ-થી બંધાએલી હોય તે બધી આકૃતિઓને ત્રિકોણ* કહે છે.

નીચેનાં માપ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવોઃ—

अब=૧·૩″,	∠**अबक**=૩૦°,	∠**बअक**=૬૦°.
,, =૧″,	,, ૫૦°,	,, =૫૦°.
,, =૧·૮″,	,, ૬૦°,	,, =૩૦°.

.........વગેરે.

એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા ખુણા.

अबक ગમે તેટલા કદનો સાંકડો ખુણો લો. તેની **अब** બાજુ **ड** સુધી વધારો.

कबड ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો?

क

ड **ब** **अ**

---

* વ્યાખ્યા—ત્રણ બાજુ કે સીધી લીટીઓ વડે જેની **હદ** બંધાએલી હોય છે તે આકૃતિને **ત્રિકોણ** કહે છે.

अबक કાટખુણો દોરો. તેની **अब** બાજુ **ड** સુધી લંબાવો. **कबड** ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો?

ગમે તેવડો એક **अबक** પહોળો ખુણો કાઢો. તેની **अब** બાજુ **ड** સુધી વધારો. **कबड** ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો?

अबक ⅓ કાટખુણા જેવડો કાઢો. **अब**ને **ड** સુધી વધારો. **कबड** ખુણો માપો અને તે કેટલા કાટખુણા બરાબર છે તે કહો.

(કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો.)

अबड લીટી પર **बक** લીટી ઉભી છે—

અને **अबक** ખુણો ૫૩ અંશનો છે; તો **कबड** કેવડો હશે?

„ „ ૭૮ „ „ „ „

„ „ ૧૧૦ „ „ „ „

„ „ ૧૩૭ „ „ „ „

ઉપલા પ્રશ્નો પૈકી દરેક પ્રશ્નમાં **अबक** ખુણો કાટખુણાથી કેટલે અંશે ઓછો કે વત્તો છે તે જુઓ, અને તેવીજ રીતે **कबड** ખુણો કાટખુણાથી કેટલે અંશે વત્તો છે કે ઓછો છે તે જુઓ. આ ઉપરથી **अबक** અને **कबड** ખુણાઓની વચ્ચે શો સંબંધ જણાઈ આવે છે? **"તે એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે."**

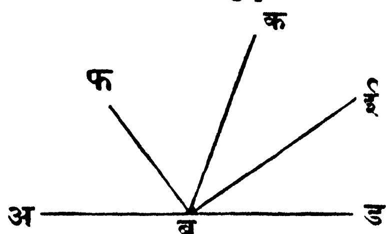
ઉપલા પ્રયોગ પરથી એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા પાસપાસેના ખુણાઓના સંબંધમાં કયો નિયમ નીકળે છે?

"એક લીટી બીજી પર પડી હોય, તો બીજી લીટીની એક બાજુ પર જે પાસપાસેના ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે."

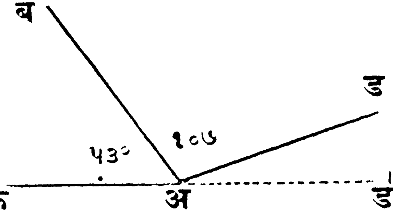
(કોણમાપકનો ઉપયોગ કર્યા વગર નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર કહો.)

अबड એક સીધી લીટી છે. તેની સાથે—
बक લીટી ૬૫°નો ખુણો કરે છે, તો **कबड** ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ?
„ ૧૨૦° „ „ „
„ ૧૨૭° „ „ „

अबड લીટી લો. તેની સાથે ગમે તેવડો ખુણો કરે એવી **बक** લીટી દોરો. કાગળ વાળીને **अबक** ખુણાને દુભાગો. તેજ પ્રમાણે **कबड** ખુણાને દુભાગો. ખુણા દુભાગનારા સળ **बफ** અને **बई** લીટીઓ વડે દર્શાવો. **ईबफ** ખુણો માપો. તે કેવડો છે? આ ઉપરથી **अबक** અને **कबड** ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર જણાઈ આવે છે? "બે કાટખુણા બરાબર."



अब લીટી લો. તેની એક બાજુએ **बअक** ૫૩ અંશનો ખુણો કરો. બીજી બાજુએ **बअड** ૧૦૭ અંશનો ખુણો કરો. **कअड** ખુણો કેટલા અંશનો થાય છે? તે બે કાટખુણા કરતાં કેટલે અંશે ઓછો કે વધારે છે? **कअड** સીધી લીટી છે કે? **कअडं** સીધી લીટી દોરો. તે સીધી લીટી થવા માટે **बअक** અને **बअडं** એ ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થવો જોઈએ?



ઉપલા પ્રશ્નોમાં **बअक** અને **बअड** અનુક્રમે ૫૦ અને ૧૧૦, ૧૦૫ અને ૭૫, ૫૧ અને ૧૨૯, ૧૧૦ અને ૯૦, ૪૯ અને ૧૪૧, ૩૦ અને ૧૭૦ લો અને ઉપરના જેવાજ પ્રયોગ કરી જુઓ.

આ ઉપરથી **कअड** લીટી સીધી હોવા માટે **बअक** અને **बअड** ખુણા વચ્ચે કેવો સંબંધ હોવો જોઈએ (એટલે તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થવો જોઈએ) એ વિષે કયો સામાન્ય નિયમ જણાઈ આવે છે? "તેમનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર હોવો જોઈએ."

अबक અને **कबड** ખુણા અનુક્રમે ૬૧° અને ૧૦૩° હોય તો **अबड** સીધી લીટી થશે કે?

अबक અને **कबड** ખુણા અનુક્રમે ૧૧૮° અને ૭૨° હોય તો **अबड** સીધી લીટી થશે કે?

अबक અને **कबड** ખુણા અનુક્રમે ૧૦૯° અને ૮૧° હોય તો **अबड** સીધી લીટી થશે કે?

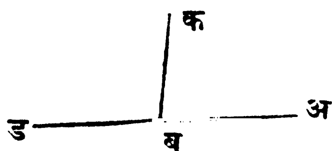
अबक અને **कबड** ખુણા અનુક્રમે ૭૧° અને ૧૧૦° હોય તો **अबड** સીધી લીટી થશે કે?

अबक અને **कबड** ખુણા અનુક્રમે ૫૦° અને ૧૩૦° હોય તો **अबड** સીધી લીટી થશે કે?

अबक અને **कबड** ખુણા અનુક્રમે ૧૩૫° અને ૫૨° હોય તો **अबड** સીધી લીટી થશે કે?

ઉપલા પ્રયોગો ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે? **"જો બે પાસપાસેના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર હોય, તો તેમના બહારના ભુજો એક સીધી લીટીમાં હોય છે."**

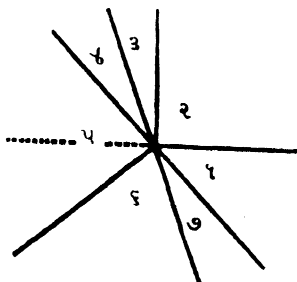
પાસેની આકૃતિમાં **अबक** અને **कबड** ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે? આ ઉપરથી **अबक, कबड, डबई,** અને **ईबअ** ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે એ તમે કહી શકશો?



ब બિંદુમાંથી ત્રણ લીટીઓ જુદી જુદી દિશામાં દોરો. તેથી બનતા ત્રણે ખુણા માપો. તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે?

ब

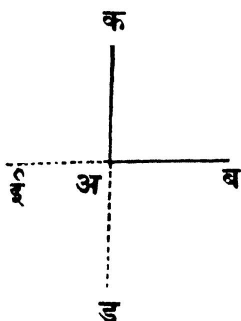
પાસેની આકૃતિમાં સાત ખુણા એક બીજાની જોડે આવેલા દર્શાવ્યા છે. એમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે, એ, ખુણા પ્રત્યક્ષ માપ્યા વગર કહો.



ઉપલી આકૃતિમાંના છ ખુણાનો સરવાળો $૩\frac{૧}{૨}$ કાટખુણા હોય, તો બાકી રહેલો ખુણો કેટલો મોટો હોવો જોઈએ?

ઉપલા પ્રશ્નમાં છ ખુણાનો સરવાળો $૨\frac{૪}{૯}$, $૩\frac{૧}{૩}$, $૨\frac{૩}{૮}$ કાટખુણા ધારીને ઉત્તર કાઢો.

बअक કાટખુણો છે. **बअ**ને **ई** સુધી વધારેલી છે, અને **कअ**ને **ड** સુધી વધારેલી છે; તો **कअई**, **ईअड**, **डअब** એ પૈકી દરેક ખુણો કાટખુણો છે એ સિદ્ધ કરો.



એક **अबक** લીટી લો. તે પર ગમે તે **बड** લીટી દોરો. કાગળની ઘડી વાળીને **अबड** ખુણાને દુભાગો, અને તેજ રીતે **कबड** ખુણાને દુભાગો. કાગળ પરના બે સળની

વચ્ચેનો ખુણો કેટલો મોટો છે તે ખુણાને પ્રત્યક્ષ માપ્યા વગર કહો. ઉત્તરનું કારણ આપો.

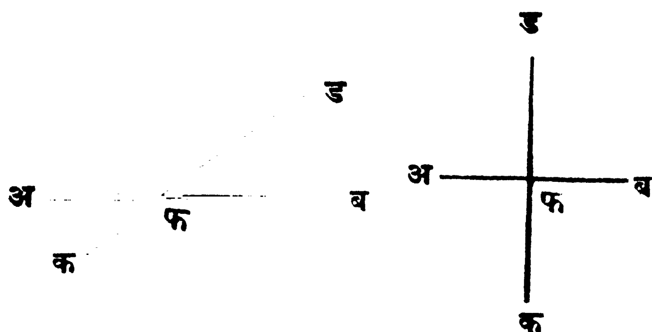
એક બીજીને છેદતી બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા.

ગમે તેટલી લાંબી બે કામડી કે સળી લો, અને તે એકજ દિશામાં પડે એવી રીતે તેમને એક ઉપર એક મૂકીને વચ્ચે કોઈ પણ ઠેકાણે ટાંકણી ખોસો. ટાંકણી સહિત કામડીઓ ઉંચકીને ટાંકણી એક ઘડિઆળની (કાગળની) તાસકના* મધ્યબિંદુમાં ખોસો. પછી બે કામડી પૈકી એકનો એક છેડો પકડીને તેને ગમે તે દિશામાં ફેરવો. તે છેડાની, વર્તુળના ૧/૧૨ ભાગ જેટલી પ્રદક્ષિણા થાય છે, એટલે બીજા છેડાની પણ ૧/૧૨ જેટલીજ પ્રદક્ષિણા થાય છે. પહેલા છેડાની ૧/૪ પ્રદક્ષિણા થાય છે, એટલે બીજાની પણ ૧/૪ પ્રદક્ષિણા થાય છે. તેમજ પહેલાની ૧/૩ પ્રદક્ષિણા થાય છે એટલે બીજાની પણ તેટલીજ થાય છે, એ ધારીને જોવા છોકરાઓને કહેવું. કામડીના જુદા જુદા ભાગોમાં ટાંકણી ખોસીને ઉપલો પ્રયોગ કરો. કામડીના બંને છેડાની પ્રદક્ષિણા સરખી થવી, એ કામડીના જે બે ભાગો ટાંકણીની આસપાસ ફરે છે, તેમની લંબાઈના ઓછાવત્તાપણા પર અથવા સરખાપણા પર આધાર રાખે છે કે? "ના."

ઉપલા પ્રયોગમાંથી નીકળતા નિયમની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો:—

---

* ઘડિઆળની તાસકને બદલે પહેલાં ૨૪મા પાના પર કહેલી આકૃતિ લીધી હોય તોપણ ચાલે.

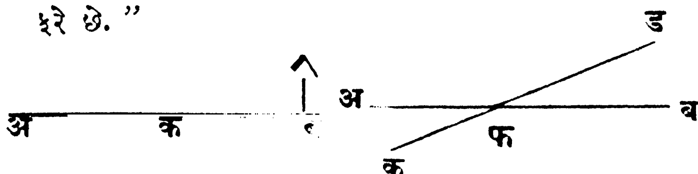


अब અને **कड** કામડીઓને એક બીજી પર રાખીને **फ** સ્થળે ટાંકણીથી જડી દીધી છે. હવે **कड** કામડીનો **ड** છેડો જો વર્તુળના $\frac{1}{8}$ ભાગમાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો **क** છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરશે?

ઉપલા પ્રયોગમાં **ड** છેડો એક કાટખુણામાં (વર્તુળના $\frac{1}{4}$ ભાગમાં) થઈને જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો **क** છેડો કેટલા મોટા ખુણામાં થઈને ફરશે?

ઉપલા પ્રયોગો પરથી, પોતાનામાંના કોઈ પણ બિંદુની આસપાસ ફરતી લાકડીના કે લીટીના બે છેડા જે ખુણાઓ-માં થઈને ફરે છે, તે ખુણાઓનો એક બીજા સાથે શો સંબંધ હોવાનું જણાઈ આવે છે?

"જ્યારે કોઈ લીટી પોતાનામાંના કોઈ બિંદુની આસપાસ ફરે છે, ત્યારે તેના બે છેડાનાં અંતરો તે બિંદુથી ગમે તેટલાં ઓછાં વત્તાં હોય, તોપણ તે છેડા સરખાજ ખુણામાં થઈને ફરે છે."



अब લીટી **क** બિંદુની આસપાસ ફરે છે. જો તેનો **कब** ભાગ ૩૧°ના ખુણામાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો **कअ** ભાગ કેટલા અંશના ખુણામાં થઈને ફરશે?

अब લીટી પર **कड** લીટી (બંનેની લંબાઈ એકજ દિશામાં હોય એવી રીતે) પડેલી છે. **कड** લીટી **फ** બિંદુની આસપાસ ફરીને **अब** સાથે **बफड** ખુણો ૨૦ અંશનો કરે, તો **अफक** ખુણો કેટલા અંશનો થાય?

ઉપલા પ્રયોગમાં **ड** છેડો ૪૫, ૬૦, ૭૫, ૧૧૫ અંશના ખુણામાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો **क** છેડો કેવડા ખુણામાં થઈને ફરશે?

ઉપલા પ્રયોગમાં **अफड** ખુણો કેટલો મોટો થશે? **कफब** ખુણો કેવડો? **बफड** ખુણો ૩૮ અંશનો છે એમ ધારીને બાકીના ત્રણ ખુણા કેવડા છે તે શોધી કાઢો.

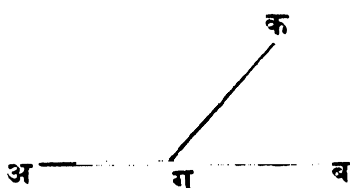
बफड ખુણો ૧૫૦, ૯૪, ૮૫, ૧૧૩ અંશનો ધારીને ઉપલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપો.

ઉપલા પ્રશ્નમાં **अफड** અને **कफब,** તથા **बफड** અને **कफअ** એ ખુણાઓને સરખાવો. તમને શું જણાઈ આવે છે?

એક **अफब** લીટી દોરો. તેને છેદનારી ગમે તે **कफड** લીટી દોરો. **बफड** ખુણો કાપી કાઢો, અને તે **कफअ** પર મૂકો. તેમજ **अफड** ખુણો કાપી કાઢી તેને **कफब** પર મૂકો. તમને શું જણાય છે?

એક બીજીને છેદતી બે સીધી લીટીઓથી બનેલા ખુણાઓ વિષે ઉપલા પ્રયોગમાંથી કયો નિયમ નીકળે છે? "**બે લીટી એક બીજીને છેદે છે ત્યારે જે ખુણા થાય છે, તેમાંથી સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.**"

પાસેની આકૃતિમાં **बगड** ખુણો ૧૩૦° છે; તો **अगड** ખુણો **बगक** ખુણા બરાબર છે, એમ બાકીના ખુણા પ્રત્યક્ષ માપ્યા સિવાય સિદ્ધ કરો.



સમાંતર લીટીઓ.

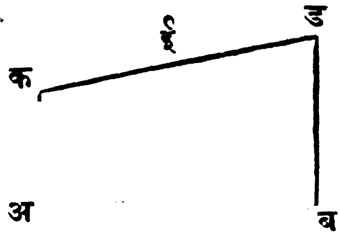
કેટલીક સમાંતર લીટીઓની અને કેટલીક અસમાંતર લીટીઓની જોડે પાટીઆ પર કાઢવી. તેમની (દરેક જોડની) એક બાજુના છેડાઓની વચ્ચેનું અંતર કેટલું છે, અને તે આગળ (બીજા છેડા તરફ) ઓછું થતું જાય છે કે વત્તું થતું જાય છે, તે જોવા છોકરાઓને કહેવું. "કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર વધતું જાય છે", "કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર ઓછું થતું જાય છે", અને "કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર પ્રથમ હતું તેટલુંજ રહે છે", એમ છોકરાઓ કહેશે. જેમની વચ્ચેનું અંતર ઓછું થતું જાય છે, તે, જે બાજુએ અંતર ઓછું છે તે બાજુ તરફ વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? "હા." સામી બાજુ તરફ વધારી હોય તો તેમના છેડા મળશે કે? "ના." જે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર વધતું જાય છે, તે, જે દિશામાં અંતર વધતું જાય છે તે દિશામાં વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? "ના." સામી દિશામાં વધારી હોય તો છેડા મળશે કે? "હા." જે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર કાયમ રહે છે, તે જમણી બાજુએ વધારી હોય તો એક બીજીને મળશે કે? "ના." ડાબી બાજુએ વધારી હોય તો? "ના." આ લીટીઓ પહેલાં કહેલી બે પ્રકારની લીટીઓથી જુદા પ્રકારની છે. એવી લીટીઓને **સમાંતર લીટીઓ** કહે છે.

સમાંતર (સમ + અંતર) = જેમની વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું હોય છે તે.

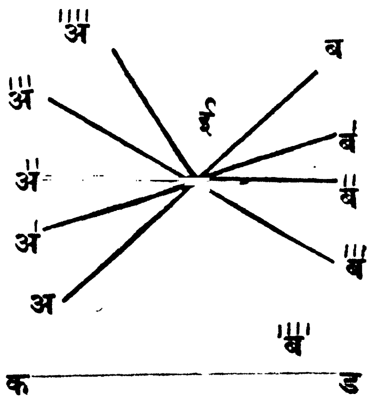
જેમની બે બાજુઓ સમાંતર હોય એવી કેટલીક વસ્તુઓનાં નામ આપો.

સમાંતર લીટીઓ વિષેની કલ્પનાનું વધારે સ્પષ્ટીકરણ.

એક સીધી **અબ** સળી પાટીઆ પર આડી મૂકી છે. તેથી



કેટલેક અંતરે બીજી એક સીધી **कड** સળી **ई** સ્થળે ખોસેલી ટાંકણીથી પાટીઆ સાથે જડી દીધી છે. આ સળીને પહેલાં ગમે તે સ્થિતિમાં હોવા દો. આ સ્થિતિમાં **क** ને **ड** છેડાનું **अब**ના છેડાઓથી અંતર માપો. **कड**નો જે છેડો **अब**થી વધારે આઘો હોય, તે છેડાને **अब**ની પાસે લઈ જાઓ, અને તે છેડો **अब**ની પાસે લઈ જતી વખતે, બીજા છેડાનું **अब**થી જે અંતર હોય તેમાં શો ફેરફાર થાય છે, તે જુઓ. " પહેલાં જે છેડો આઘો હતો તેનું અંતર જેમ જેમ ઓછું કરવામાં આવે છે, તેમ તેમ બીજા છેડાનું અંતર વધતું જાય છે." એ પ્રમાણે ફેરફાર થતાં થતાં કોઈ પણ વખતે **अब**થી **क** અને **ड** છેડાનું અંતર સરખું થાય છે કે? " થાય છે. " એવી સ્થિતિમાં બે લીટીઓ હોય ત્યારે તેમની વચ્ચે બધે ઠેકાણે સરખું અંતર હોય છે, માટે એવી સ્થિતિમાં તેમને સમાંતર કહે છે.



પાસેની આકૃતિમાં **अ ब** લીટી ફરે છે ત્યારે તે જે જુદી જુદી સ્થિતિમાં આવે છે, તે સ્થિતિ **अ'ब'**, **अ''ब''**, **अ'''ब'''** એ લીટીઓ દર્શાવે છે. **अब** લીટી એવી છે, કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો તે એક અમર્યાદ **कड** લીટીને છેદે. **अ'ब'** એવી છે, કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો

તે **कड**ને છેદે...**अ' ब'** લીટી એવી છે, કે તેને ડાબી બાજુએ વધારી હોય, તો તે **कड**ને છેદે નહિ, પરંતુ તેને જમણી બાજુએ વધારી હોય, તો **कड**ને છેદે. **अ'' ब''** લીટી એવી છે કે તે...વગેરે.

ઉપલા પ્રયેાગ પરથી એમ જણાય છે, કે **अब** લીટી **ई**ની આસપાસ ફરવામાં અમુક હદ સુધીજ, ડાબી બાજુએ વધારી હોય તો **कड**ને છેદે છે. તે હદની બહાર, તે લીટીને જમણી તરફ વધારી હોય તો **कड**ને છેદે છે. આ બે હદની વચ્ચે એવી એક સ્થિતિ હોવી જોઈએ, કે તે સ્થિતિમાં તે લીટીને ગમે તે દિશામાં વધારી હોય, તોપણ તે **कड**ને મળે નહિ. એવી સ્થિતિમાં એ લીટી હોય તો તેમને **સમાંતર લીટીઓ** કહે છે.

કેટલાક ખુણાનાં નામ.

अब, कड લીટીઓને **ईफ** લીટી **म** અને **ह** બિંદુમાં છેદે છે. **ईफ** લીટી વડે **अब, कड** લીટીઓની સાથે જે ખુણા થાય છે, તેમને નીચે પ્રમાણે નામ આપ્યાં છેઃ—

ई
क ह ड
म
अ ब
फ

∠**कहम** અને ∠**हमब**ને **વ્યુત્ક્રમ** (વિરુદ્ધ બાજુએ હોય એવા) **ખુણા** કહે છે.

∠**डहम** અને ∠**हमअ**ને વ્યુત્ક્રમ ખુણા કહે છે.

∠**ईहक**, ∠**ईहड**, ∠**फमअ**, અને ∠**फमब**ને **બહારના ખુણા** કહે છે. (કારણ કે તે આપેલી લીટીઓની બહારની બાજુના ખુણા છે.)

∠ईहड, ∠हमबने संगत ખુણા કહે છે.

∠ईहक, ∠हमअने „ „ „

∠कहम, ∠हमअ, ∠डहम, ∠हमबने અંદરના ખુણા કહે છે. (કારણ કે તે આપેલી લીટીઓની અંદરની બાજુના ખુણા છે.) એમાંથી **∠कहम** અને **∠हमअ** એ **ईफ**ની એકજ બાજુએ છે, તેથી તેમને **એકજ બાજુ તરફના અંદરના ખુણા** કહે છે. તેમજ **∠डहम** અને **∠हमब ईफ**ની એકજ બાજુએ છે, તેથી તેમને પણ એક બાજુ તરફના અંદરના ખુણા કહે છે.

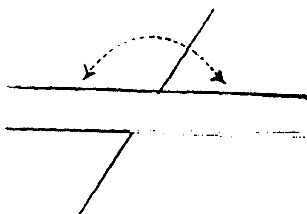
તમારી એક્સર્સાઇઝ બુકમાં દોરેલી સમાંતર લીટીઓની જુદી જુદી ચાર જોડે લો. તેમને છેદનારી ગમે તે લીટીઓ દોરો. છેદનારી લીટીઓને લીધે થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા માપો. તેમને એક બીજા સાથે (વ્યુત્ક્રમ ખુણાની જોડમાંના એક ખુણાને બીજા સાથે) સરખાવો. તમને શું જણાય છે?

વ્યુત્ક્રમ ખુણાઓમાંથી એક ખુણો કાપી કાઢીને બીજા ખુણા પર મૂકો. શું દેખાય છે? “ તે સરખા છે.”

સમાંતર ન હોય એવી બે લીટી લો. તેમને છેદે એવી એક લીટી દોરો. આ લીટીથી થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા માપો, અને તેમને સરખાવો. તે સરખા છે કે? “ ના.”

આ ઉપરથી સમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણા અને અસમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણાની વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે?

તમારી એક્સર્સાઇઝ બુકમાં દોરેલી ગમે તે બે સમાંતર લીટીઓ લો. તેમને છેદનારી એક લીટી દોરો. આ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનો આ છેદનારી લીટીની એક બાજુનો (ડાબી કે જમણી



બાજુનો) કાગળનો ભાગ કાતરથી કાપી કાઢો. આ ભાગ અર્ધા વર્તુળ જેટલો ફેરવીને (આકૃતિ જુઓ) બીજી બાજુના ભાગ પર એવી રીતે મૂકો કે વ્યુત્ક્રમ ખુણા એક બીજા પર પડે. આ ઉપરથી વ્યુત્ક્રમ ખુણા વિષે તમે શું શીખ્યા?

સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે એક બાજુ પર જે બહારનો ખુણો થાય છે, તેને સામેના (સંગત) ખુણા સાથે સરખાવો. અસમાંતર લીટીઓ લઈને એજ પ્રયોગ કરો. શો તફાવત જણાઈ આવે છે? "સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે થતા ખુણા પૈકી બહારનો ખુણો તેજ બાજુના સંગત ખુણા બરાબર હોય છે. અસમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે થતા ખુણા પૈકી બહારનો ખુણો તેજ બાજુ પરના સંગત ખુણાની બરાબર હોતો નથી."

સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે તે લીટીની એક બાજુએ જે અંદરના ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે? બીજી બાજુના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કરો. તે કેટલો થાય છે? "બે કાટખુણા."

જેમની વચ્ચેનું અંતર જમણી બાજુ તરફ ઓછું થતું જાય છે, એવી લીટીઓની જોડ લઈને, તેમને છેદનારી લીટીને લીધે જમણી બાજુએ થતા બે અંદરના ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. આ સરવાળો કેટલો થાય છે? બે કાટખુણાથી ઓછો કે વત્તો? "ઓછો."

જેમની વચ્ચેનું અંતર જમણી તરફ વધતું જાય છે, એવી લીટીઓની જોડ લઈને, તેમને છેદનારી લીટીને લીધે જમણી તરફ થતા બે અંદરના ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. તે સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય છે કે વધારે? "વધારે."

સમાંતર લીટીઓના સંબંધમાં ઉપર જે પ્રયોગો કર્યા છે, તે પરથી તેમના કયા ધર્મો જણાઈ આવે છે?

"જો એક લીટી બે સમાંતર લીટીઓને છેદે, તો–

(૧) વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા હોય છે;

(૨) સંગત ખુણા સરખા હોય છે;

(૩) છેદક લીટીની એક બાજુ પરના બે અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય છે."

આ ધર્મો સમાંતર લીટીઓ સિવાય બીજી લીટીઓમાં દેખાઈ આવતા નથી.

સૂચના:—નીચેની વ્યાખ્યા અને આ પ્રકરણમાં આવેલી બીજી વ્યાખ્યાઓ આ પ્રકરણ ચાલતું હોય ત્યારે વિદ્યાર્થીઓને સમજાવવી, અને પ્રકરણ પુરૂં થયા પછીજ તેમની પાસે મોઢે કરાવવી.

સમાંતર લીટીઓની વ્યાખ્યા:—જે લીટીઓ (એકજ સપાટીમાં* હોઈ એવી હોય છે, કે તે) કોઈ પણ બાજુએ ગમે તેટલી વધારી હોય તે છતાં પણ એક બીજીને મળતી નથી, તે **સમાંતર લીટીઓ** કહેવાય છે.

'એકજ સપાટીમાં હોઈ' આ શબ્દો શા માટે વાપર્યા છે? એક પેન્સિલ પૂર્વપશ્ચિમ પકડી રાખી હોય, અને તે પર થોડે અંતરે બીજી પેન્સિલ પહેલીને અસમાંતર છતાં દક્ષિણોત્તર પકડી રાખી હોય, તો તે પેન્સિલોથી દર્શાવાતી લીટીઓ ગમે તેટલી વધારી હોય તોપણ એક બીજીને બીલકુલ મળશે નહિ. પણ તે સમાંતર છે કે? "ના." આ ઉપરથી 'એકજ સપાટીમાં' એ શબ્દોની જરૂર સમજાય છે કે?

એ સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે એક બાજુએ

---

* સપાટી શબ્દનો અર્થ આગળ બીજા પ્રકરણમાં આવશે.

જે અંદરના ખુણા થાય છે, તે પૈકી એક ખુણો જો ૧૦૦°નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જો ૮૦°નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જો ૭૫°નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જો ૧૪૦°નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી દોરવા વિષે.

સમાંતર લીટીઓના ધર્મો વિષે જે કહેવામાં આવ્યું છે, તે ઉપરથી સમાંતર લીટીઓ દોરવાની કોઈ રીત તમને જણાઈ આવે છે કે ? ધારો કે **અબ** લીટીને સમાંતર લીટી **ક** બિંદુમાંથી દોરવી છે; તો તે કેમ દોરશો ? **ક**માંથી **અબ** લીટીને ગમે તે એક **ડ** બિંદુમાં મળનારી એક **કડ** લીટી દોરો. **કડબ** ખુણો માપો. કોઈ એક લીટી **ક** પાસે કેવડો ખુણો કરે તો તે લીટી **અબ**ને સમાંતર થાય ? "∠**કડબ** જેટલો." **કડ**ની કઈ બાજુએ ? "**કડબ**થી વિરુદ્ધ બાજુએ."

ઉપલા પ્રશ્નમાં **ક**માં થઈને જનારી સમાંતર લીટી કાઢીએ, તો **ક**ની જમણી તરફ અંદરની બાજુએ જે ખુણો થાય તે કેવડો હોય? તે ખુણો દોરીને સમાંતર લીટી દોરી શકાય કે? **અબ** લીટી અને **ક** બિંદુ લઈને ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે **ક**માં થઈને જનારી સમાંતર લીટી દોરો.

એક **अब** લીટી લો. તેની ઉપલી બાજુએ એક **क** બિંદુ લો. **अब**માં ગમે તે **ड** બિંદુ લો. **कड** સાંધો. પછી નીચેના ત્રણ પ્રયોગ જુદી જુદી આકૃતિ દોરીને કરો:—

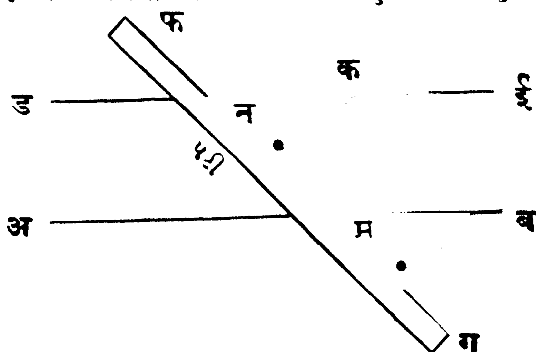
(૧) ∠**कडब** જેવડો ∠**डकई** લઈને **ईकफ** લીટી દોરો.

(૨) ∠**कडब**ના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા જેવડો ∠**डकफ** દોરો, અને **फक**ને **ई** સુધી વધારો.

(૩) **डक**ને **क** તરફ **ग** સુધી વધારો. ∠**कडब** બરાબર ∠**गकफ** કરો, અને **फक**ને **ई** સુધી વધારો.

(૨) અને (૩) એ આકૃતિઓમાં વ્યુત્ક્રમખુણા બરાબર છે, અને **ईफ**, **अब**ને સમાંતર છે, એ બતાવી આપો.

બીજી રીત:—अबफ લીટી પર ત્રિકોણમાપનો કર્ણ બરાબર પડે એવી રીતે તે ત્રિકોણમાપ મૂકવું. ત્રિકોણમાપની બીજી બાજુને (એટલે કાટખુણો કરનારી એ બાજુમાંથી એક બાજુને) આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે પટ્ટી લગાડવી.



પછી પટ્ટીને દાબી રાખીને પટ્ટીની કોરે કોરે ત્રિકોણમાપને ઉપલી બાજુએ ખસેડવું. **क** બિંદુ પર ત્રિકોણમાપનો કર્ણ આવ્યો, કે કર્ણની કોરે કોરે **क** બિંદુમાં થઈને જાય એવી લીટી દોરવી.

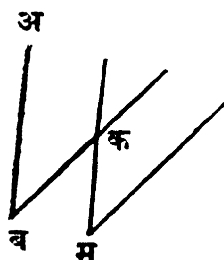
ધારો કે એવી રીતે **डई** લીટી **क** બિંદુમાં થઈને જાય એમ **अब**ને સમાંતર દોરેલી છે, તો તે સમાંતર છે એ વાત નીચે પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકે. **अब, डकई** એ લીટીઓને છેદનારી **फग** લીટીથી થનારા **न** અને **म** સંગતખુણા સરખા છે; માટે **डकई** લીટી **अब**ને સમાંતર છે.

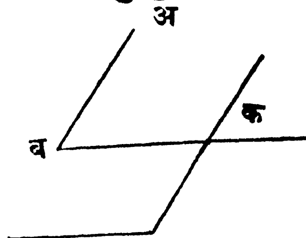
એક **अब** લીટી લો. **अब**ને સમાંતર **कड** લીટી દોરો. **कड**ને સમાંતર **ईफ** લીટી દોરો. **ईफ, अब**ને સમાંતર છે કે ? આ ઉપરથી, જે બે લીટીઓ ત્રીજીને સમાંતર હોય છે, તેમના સમાંતરપણા વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે? " તેઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે. "

એક બીજીને સમાંતર ઘણી લીટીઓ દોરવાની રીત:—જે દિશામાં સમાંતર લીટીઓ દોરવી હોય, તે દિશામાં ત્રિકોણમાપનો એક ભુજ* મૂકીને તેની લગોલગ લીટી દોરવી. (એક આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી કાઢવી હોય તો તે લીટી પર ત્રિકોણમાપનો ભુજ મૂકવો.) પછી બીજી પટી કે ત્રિકોણમાપ લઈને, તેની એક બાજુ પહેલા ત્રિકોણમાપના કાટખુણાના બીજા ભુજને લગાડવી. પછી પહેલા ત્રિકોણમાપને ઉપર કે નીચે જરૂર પ્રમાણે પટીની કે બીજા ત્રિકોણમાપની કોરે કોરે ખસેડીને સમાંતર લીટીઓ દોરવી.

એક ઉભી લીટી લો. તેમાં ગમે ત્યાં ચાર પાંચ બિંદુ લો, અને તે બિંદુઓમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટીઓ દોરો.

સમાંતર ભુજોવાળા ખુણા.





---

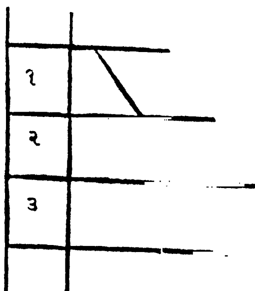
* કાટખુણો કરનારી બે બાજુઓને ભુજ કહે છે.

એક **અબક** ખુણો લો. અને તે એક **મ** બિંદુ લો. **મ**-માંથી **બઅ**, **બક**ને સમાંતર લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો માપો. તેને **અબક** સાથે સરખાવો. તે ∠**અબક** જેવડો ન હોય તો તેને ∠**અબક** માં ઉમેરો, અને એનો સરવાળો કેટલો થાય છે તે જુઓ.

આ ઉપરથી કોઈ ખુણો અને તેના ભુજોને સમાંતર હોય એવી લીટીઓ વચ્ચેનો ખુણો એ એની વચ્ચેના સંબંધ વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે ? " આ ખુણા સરખા હોય છે અથવા ન્યૂનતાપૂરક હોય છે. " (ખુણા ક્યારે સરખા છે અને ક્યારે ન્યુનતાપૂરક હોય છે એનો ખુલાસો આગળ ૬૮મા પ્રમેયની નીચે કર્યો છે.)

સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના ગાળાઓ.

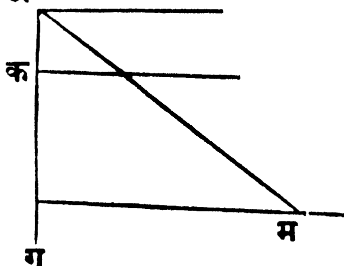
એક ઉભી લીટી લો. તેમાં સરખે અંતરે ત્રણ કે ચાર બિંદુઓ લો, અને તેમાં થઈને જાય એવી સમાંતર લીટીઓ દોરો. આ બધી સમાંતર લીટીઓને છેદે એવી બીજી ચાર પાંચ લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓ પૈકી પહેલી લીટીના, સમાંતર લીટીઓને લીધે, જે બે કે ત્રણ ગાળાઓ પડે છે, તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે ? "ગાળાઓ સરખા છે." એવીજ રીતે બીજી લીટીના ગાળાઓ સરખાવીને શું જણાય છે તે જુઓ. " ગાળાઓ સરખા છે. " ત્રીજી અને ચોથી લીટી માટે એવાજ



પ્રયોગ કરો. (પુ૦.) આ ઉપરથી કયો નિયમ જણાઈ આવે છે ? **"જો ત્રણ કે ત્રણથી વધારે સમાંતર લીટીઓને**

છેદનારી એક લીટીના ગાળાઓ સરખા હોય, તો તે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી બીજી ગમે તે લીટીના ગાળાઓ સરખા હોય છે,"

अग અને **अम** લીટીઓ ગમે તેવડો ખુણો કરે એમ દોરો. **अग** લીટીમાં **अ**થી થોડે અંતરે **क** બિંદુ લો; **अक**થી બમણે અંતરે **ब** બિંદુ લો; **अ, क, ब,** બિંદુમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટીઓ દોરો.



આ લીટીઓને લીધે **अम**ના જે બે ગાળા પડે છે તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે? ઉપલી આકૃતિમાં સમાંતર લીટીઓને છેદનારી ગમે તે લીટી દોરો. તેના સમાંતર લીટીઓને લીધે જે ગાળા પડે છે તેમને સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે?

अग લીટીમાં **कब** અંતર **अक**થી ત્રણગણું લો, અને ઉપર પ્રમાણેજ પ્રયોગ કરો. આ પ્રયોગ પરથી શું સમજાય છે?

સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર.

બે સમાંતર લીટી દોરો. તે બે વચ્ચે ઓછામાં ઓછું અંતર દેખાડનારી લીટી દોરો. આ લીટી સમાંતર લીટીઓ પૈકી દરેક લીટી સાથે કેવડો ખુણો કરે છે?

આ ઉપરથી સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર (ઓછામાં ઓછું અંતર) કાઢવા વિષે શો નિયમ સમજાય છે? "સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર તેમની વચ્ચેનો લંબ છે."

એક્સર્સાઇઝ બુકમાંની સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર મિલિમીટરમાં કાઢો.

એ સમાંતર લીટીઓ દોરો. તેમાંથી એક પર લંબ દોરો. તે લંબને બીજી લીટીને છેદતાં સુધી લંબાવો. તે બીજી લીટી પર લંબ છે કે? "હા." આ ઉપરથી શું સમજાય છે? "એ સમાંતર લીટી પૈકી એક લીટી પર લંબ હોય એવી લીટી બીજી લીટી પર પણ લંબ હોય છે."

ત્રિકોણ.

વર્તુળ.

ચાકની લાકડી ખોસવાના લાકડાના કંપાસની બે અણી વચ્ચે એક ફુટ અંતર રાખવું. પાટીઆ પર એક બિંદુ લઈને તેને અ નામ આપવું. અ બિંદુ પર કંપાસની તીક્ષ્ણ અણી મૂકીને ચાકની અણીથી પાટીઆ પર એક બિંદુ કાઢવું. અથી આ બિંદુનું અંતર કેટલું છે? "એક ફુટ." પછી તીક્ષ્ણ અણી કાયમ રાખીને (બંને અણીઓની વચ્ચેનું અંતર તેનું તેજ રાખીને) ચાકની અણી જરા (ગોળાટમાં) આગળ ખસેડીને બીજું બિંદુ કાઢવું. અથી આ બિંદુનું અંતર કેટલું છે? "એક ફુટ." એજ પ્રમાણે ચાકની અણી ગોળાટમાં ખસેડીને ટપકાંની લીટીથી વર્તુળ બનાવવું; અને કાઢેલાં ટપકાંનું અંતર અથી સરખુંજ છે (એટલે એક ફુટ છે) એ જવાબ છોકરાઓની પાસે કઢાવવો. પછી કંપાસ ફરીથી પાટીઆ પર મૂકીને ટપકાં પર થઈ જાય એવી રીતે ચાકની અણી ફેરવીને વર્તુળ પુરું કરવું. (વર્તુળના પરિઘ પરનું એકાદ બિંદુ બતાવીને) "આનું અથી અંતર કેટલું છે?" "એક ફુટ." (પરિઘ પરનું બીજું કોઈ બિંદુ દેખાડીને) આનું અંતર અથી કેટલું છે? "એક ફુટ." આ લીટી-

અ.

માંના કોઈ પણ બિંદુનું અંતર અથી એક ફુટ છે, એ વાત પરથી વર્તુળના પરિધ પરના બિંદુ અને મધ્યબિંદુ વચ્ચેના અંતર વિષે કયો નિયમ જણાઈ આવે છે? "પરિધ પરનાં સર્વ બિંદુઓ મધ્યબિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે." તેટલાજ અંતર પરનું (એટલે એક ફુટ અંતરે હોય એવું) બિંદુ પરિધની અંદર કે બહાર હોવાનો સંભવ છે કે? "ના."

ગોળ આંકણીની આસપાસ બરાબર એક ફેરો થતા સુધી દોરો લપેટો, અને જ્યાં એક ફેરો પુરો થાય ત્યાંથી દોરો કાપી કાઢો. પછી કાપેલા દોરાનો કકડો માપો. (અથવા ગોળ આંકણીની બાજુ પર કંઈ નિશાની કરીને તે આંકણી-ની એક પ્રદક્ષિણા થાય ત્યાંસુધી તે આંકણીને ફુટપટી પર ફેરવો, અને ફુટપટી પરનું અંતર માપો. પછી તે આંકણી-નો વ્યાસ માપો. આંકણીના વ્યાસ અને પરિધ વચ્ચે શું પ્રમાણ હોવાનું જણાઈ આવે છે?)

ભોંય પર પૈસો મૂકી તેની આસપાસ દોરો લપેટીને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો.

બે ઈંચ વ્યાસનું વર્તુળ કાઢો. પાણીમાં દોરો પલાળીને તેને વર્તુળના પરિધ પર મૂકી પરિધની લંબાઈ માપો. પરિધ વ્યાસથી કેટલાગણો મોટો છે તે જુઓ.

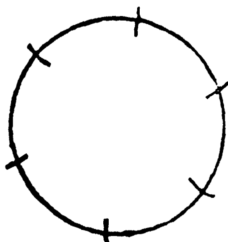
૩.૫", ૭" વ્યાસનાં વર્તુળ લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો. વ્યાસથી પરિધ કેટલાગણો મોટો હોય છે એ વિષે તમને શું જણાઈ આવે છે? "૩$\frac{૧}{૭}$ ગણો, અથવા વ્યાસ અને પરિધનું પ્રમાણ ૭:૨૨ હોય છે."

કાગળના કકડા પર એક વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળના પરિધ પર **अ, ब, क, ड, ई, फ, ग**...એ બિંદુઓ ઘણાં પાસપાસે લઈને તેમાં ટાંકણીઓ ખોસો. **अ** આગળ શરૂ કરીને ફરીથી **अ** સુધી આવી પહોંચે ત્યાં લગી ટાંકણીઓની આસપાસ

દોરો લપેટો, અને તે બિંદુ આગળ દોરો કાપી કાઢો. આ દોરાની લંબાઈ લગભગ વર્તુળના પરિઘ જેટલી છે, એમ જણાશે. આ લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યાથી કેટલાગણી છે ? "સવાછગણી છે."

ઉપલા પ્રયોગ પરથી એમ જણાઈ આવશે, કે **અબ** અંતર જેમ જેમ ઓછું લઈએ તેમ તેમ દોરો **અબ** કૌંસની વધારે ને વધારે પાસે થઈને જાય છે. આ પરથી એમ જણાઈ આવે છે, કે વર્તુળમાં દોરેલી ઘણી બાજુવાળી આકૃતિની બાજુઓ જો ઘણીજ નાની હોય, તો તે આકૃતિની પરિમિતિ લગભગ વર્તુળના પરિઘ જેટલી હોય છે.

ગમે તેવું એક વર્તુળ દોરો. તે વર્તુળની ત્રિજ્યા જેટલું અંતર કંપાસની અણીઓની વચ્ચે રાખીને કંપાસની અણીઓ પરિઘ પર મૂકીને પરિઘના થાય તેટલા સરખા ભાગ કરો. કેટલા ભાગ થયા ? "૭."



ત્રિજ્યા જેટલી લાંબી જ્યાઓ* વર્તુળમાં એક પુરી થાય ત્યાં બીજી શરૂ થાય એવી રીતે એક પછી એક મૂકી હોય તો તેવી જ્યાઓ એક પુરી પ્રદક્ષિણા થાય ત્યાંસુધી, એક વર્તુળમાં કેટલી કાઢી શકાય ? "૭."

વર્તુળ અને ત્રિકોણ.

૨" ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ કાઢો. ૨" વ્યાસવાળું વર્તુળ કાઢો. ૨.૫" ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. ૨૨ મિ. મી. ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો.

---

* પરિઘ પરનાં કોઈ પણ બે બિંદુને સાંધનારી લીટીને જ્યા કહે છે.

अ સ્થળે રાખેલી તોપનો ગોળો ચાર માઇલ સુધી જાય છે, તો તે તોપના ગોળાની મર્યાદામાં આવતા પ્રદેશની હદ દેખાડો. (સ્કેલ—૧ માઇલ=$\frac{1}{2}$".)

બે કિલ્લા વચ્ચે ૯ માઇલનું અંતર છે. દરેક કિલ્લા પરની તોપનો મારો ૭ માઇલ સુધી પહોંચે છે; તો બંને કિલ્લા પરની તોપના મારામાં જે સામાન્ય પ્રદેશ આવે છે તેની હદ દેખાડો. (સ્કેલ—૫ મિ. મી = ૧ માઇલ.)

એક વર્તુળાકાર બાગનો વ્યાસ ૫૦ ફુટ છે. એક માળી તે બાગની કોર પર હાથમાં પાણીની નળી લઈને ઉભો છે. જો નળીમાંથી પાણી ૩૦ ફુટ આઘું ઊડી શકે, તો જ્યાં માળી ઉભો રહ્યો છે તે જગા પરથી તે બાગનો કેટલો ભાગ પલાળી શકશે, એ આકૃતિ કાઢીને બતાવો. (સ્કેલ—૧ મિ. મી = ૧ ફુટ.)

એક બીજાથી ૧·૫" અંતરે **अ** અને **ब** બિંદુઓ લો. **अ**થી ૧·૫" અંતરે હોય એવાં બધાં બિંદુઓની જગા એક લીટીથી બતાવો. (આ લીટી, ૧·૫" ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ થશે.) **ब**થી ૧·૫" અંતરે હોય એવા તમામ બિંદુઓની જગા લીટીથી બતાવો. **अ** ને **ब** એ બંને બિંદુથી ૧·૫" અંતરે કેટલાં બિંદુ છે? "બે." તેમને **क** ને **ड** કહો. તેમને **अ**, **ब** સાથે સાંધો. **अब**, **बक**, **कअ** અને **अब**, **बड**, **डअ** લીટીઓની લંબાઈ કેટલી છે?

अ ને **ब** એ બે બિંદુઓ એક બીજાથી ૧·૭" આઘાં છે. **अ**થી ૨" દૂર હોય એવાં બધાં બિંદુઓની જગાઓ બતાવો. **ब**થી ૧·૫" અંતરે હોય એવાં તમામ બિંદુઓની જગા લીટીથી દેખાડો. **अ**થી ૨" અને **ब**થી ૧·૫" આઘું કયું બિંદુ છે? એવાં બિંદુઓ બધાં મળીને કેટલાં છે? "બે." તેમને **क** ને **ड** કહો. **अक** અને **बक**ની લંબાઈ કેટલી છે? તેમજ **अड** અને **बड**ની લંબાઈ કેટલી છે?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, આપેલાં બે બિંદુથી અમુક અંતરે હોય એવું બિંદુ કાઢવાની કઈ રીત જણાઈ આવે છે? (અર્થાત્ બે બિંદુથી અમુક અંતરે હોય એવું બિંદુ કાઢવું હોય તો તે કેમ કાઢવું?) આ બિંદુઓ સાંધવાથી જે આકૃતિ થાય છે, તેને કેટલી બાજુઓ હોય છે? કેટલા ખુણા?

अ,ब બિંદુઓ એક બીજાથી ૧·૨″ અંતરે છે. **अ**થી ૨″ અને **ब**થી ૧·૬″ અંતરે હોય એવું **क** બિંદુ શોધી કાઢો. **अ ब, ब क, अ क** એ બિંદુઓ સાંધો. **अब,बक,कअ**ની લંબાઈ કેટલી? **अबक** એ કઈ આકૃતિ છે?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, જેની **अब,बक,अक** બાજુઓની લંબાઈ આપેલી હોય, એવો ત્રિકોણ દોરવા વિષે કયો નિયમ નીકળે છે?

ઉપલા પ્રયોગમાંની આકૃતિમાંના **अबक** અને **अबड** ત્રિકોણમાં કંઈ સરખાપણું હોવાનું જણાઈ આવે છે કે?

નીચે આપેલાં માપ ઉપરથી ત્રિકોણ કાઢો:—

अब	૧·૪″	**बक**	૨″	**कअ**	૨·૫″;
,,	૨·૧″	,,	૧·૯″	,,	૩·૨″;
,,	૪·૧″	,,	૪·૨″	,,	૪·૩″;
,,	૪૧ મિ. મી.	,,	૪૨ મિ. મી.	,,	૪૩ મિ. મી.
,,	૩૨ ,,	,,	૧૮ ,,	,,	૨૦ ,,
,,	૬૯ ,,	,,	૧૧૪ ,,	,,	૫૮ ,,

(કેટલીક) વ્યાખ્યાઓ.

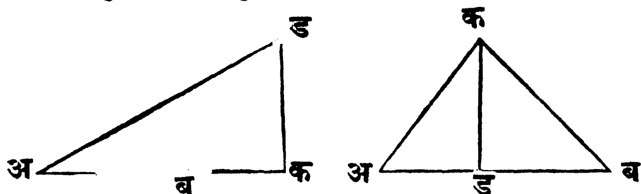
ત્રિકોણ જે બાજુ પર ઉભો છે એમ આપણે ધારીએ છીએ, તે બાજુ તેનો **પાયો** કહેવાય છે. **अबक** ત્રિકોણ **अब** બાજુ પર છે એમ ધાર્યું હોય, તો **अब** તેનો પાયો થાય; પણ તે **बक** પર ઉભો છે એમ ધાર્યું હોય તો **बक** તેનો પાયો થાય.

क

अ ब

ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો કહે છે.

ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલા લંબને તેની



ઉંચાઈ કહે છે. પાસેના ત્રિકોણમાં **कड, अबक** ત્રિકોણની ઉંચાઈ છે.

ત્રિકોણની બાજુઓ સરખી હોય કે ન હોય, તે પરથી ત્રિકોણના કેટલા પ્રકાર થઈ શકે ?

"(૧) જેમની બધી બાજુઓ સરખી હોય એવા;
(૨) જેમની ફક્ત બે બાજુઓ સરખી હોય એવા;
(૩) જેમની કોઈ પણ બાજુઓ સરખી ન હોય એવા."

(જેમની એકજ બાજુ સરખી હોય એવા ત્રિકોણ હોઈ શકે ? એવો કોઈ પ્રકાર છે એમ ધારવામાં શી ભૂલ થશે ?)

જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ સરખી હોય તેને **સમબાજુ ત્રિકોણ** કહે છે.

જે ત્રિકોણની બે બાજુ સરખી હોય તેને **સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ** કહે છે.

દરેક સમબાજુ ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે, પરંતુ દરેક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ સમબાજુ હોતો નથી.

જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ અસમાન એટલે વિષમ હોય તેને **વિષમબાજુ ત્રિકોણ** કહે છે.

કેટલાક સમબાજુ, કેટલાક સમદ્વિબાજુ, અને કેટલાક વિષમબાજુ ત્રિકોણ, પ્રથમ વિભાજક અને પટીની મદદથી અને પછી તેમની મદદ સિવાય (એટલે એકલા હાથે) દોરો.

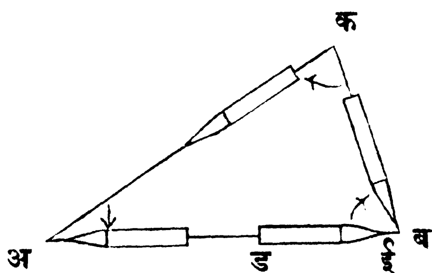
ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો.

ગમે તેવો એક ત્રિકોણ કાઢો. તેના ત્રણે ખુણાને નિશાની કરીને તેમને ચપ્પુથી કાપી કાઢો, અને તેમને એક બીજાની લગોલગ મૂકો. તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે?

ગમે તેવો ત્રિકોણ કાઢો. તેના ત્રણે ખુણા કોણમાપકથી માપો. તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે? આ ઉપરથી ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે? **"ત્રિકોણના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય છે."**

ત્રિકોણના અંદરના બધા ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ બતાવવા માટે નીચેનો પ્રયોગ કરવો.

અબક એક ત્રિકોણ છે એમ ધારો. **ડઈ** એક પેન્સિલ છે, અને તેની **ઈ** અણી **બ** તરફ છે. આ પેન્સિલને **અબ** બાજુમાં **બ** સુધી ખસેડો. તે બિંદુ આગળ **ડ** છેડાને **અબક** ખુણા જેટલો ફેરવીને **ઈડ**, **બક** પર પડે એમ કરો. પછી પેન્સિલને **ક** તરફ ખસેડો; અને **ડ** છેડો **ક**ને અડકે, એટલે **ઈ** છેડાને **બકઅ** ખુણા જેટલો ફેરવો. પછી પેન્સિલને **અ** તરફ ખસેડો; અને **ઈ** છેડો **અ**ને અડકે, એટલે **ડ** છેડાને **કઅબ** ખુણા જેટલો ફેરવો. પેન્સિલને **અબ** લીટીમાં ખસેડીને પ્રથમને સ્થળે લાવો. હવે પેન્સિલની **ઈ** અણી કઈ દિશામાં છે? " **અ**



તરફ." પહેલાં કઈ દિશામાં હતી ? "બ તરફ." આ પરથી ક અણી પ્રથમ હતી તેની વિરુદ્ધ દિશામાં ગઈ છે એમ જણાઈ આવે છે. અણીની દિશા બદલતી વખતે પેન્સિલ કેવી રીતે ફરતી ગઈ એ ધ્યાનમાં લો, અને તે પરથી કઈ પેન્સિલ કેટલા કાટખુણામાં થઈને ફરી તે કહો. "તે બે કાટખુણામાં થઈને ફરી છે." અર્થાત્ ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર છે, એમ આથી સિદ્ધ થાય છે.

પ્રશ્ન.

જો ત્રિકોણના બે ખુણા નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તો ત્રીજો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ તે કહો:—

૧૦૦°, ૫૦°; ૭૦°, ૪૦°; ૧૧૨°, ૧૮°; ૩૦°, ૪૦°.

જે ત્રિકોણોના બબ્બે ખુણા સરખા હોય, અને જેમનો ત્રીજો ખુણો નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તેમના બાકીના ખુણા કેવડા હોવા જોઈએ ?:—

૪૦°, ૫૬°, ૧૦°, ૧૫°, ૮૫°.

ઉપલી સંખ્યાઓ ત્રિકોણોના બે સરખા ખુણામાંનો એક ખુણો દર્શાવે છે, એમ ધારીને ઉપલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવાનો પ્રયત્ન કરો.

જેના સઘળા ખુણા સરખા છે, એવા ત્રિકોણનો દરેક ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ ?

નીચે આપેલા અંશના ખુણાવાળા ત્રિકોણ કાઢી શકાશે કે ?

(૧) ૯૦°, ૬૦°, ૩૦°. (૨) ૭૭°, ૮૪°, ૨૦°.

(૩) ૫૯°, ૬૦°, ૬૧°. (૪) ૧૩૫°, ૨૨°, ૨૨°.

(૫) ૭૩°, ૭૩°, ૩૩°. (૬) ૫૪°, ૫૪°, ૭૨°.

જે ત્રિકોણ કાઢી શકાય એવા ન હોય તેમના સંબંધમાં કારણ આપો.

જેનો ત્રિકોણ બની ન શકે, એવા ત્રણ ત્રણ ખુણાના કેટલાક સટ અથવા સમુદાય આપો.

એક સીધી લીટીને બંને છેડે કાટખુણો કરનારી લીટીઓ દોરીએ, તો તે ત્રણ લીટીઓનો ત્રિકોણ બનશે કે?

એક સીધી લીટીના બંને છેડા આગળ પહોળો ખુણો કરનારી લીટીઓ દોરીને પહોળા ખુણાની બાજુએ ત્રિકોણ બનાવી શકાય કે? ·

જેમના ત્રણ ખુણા અનુક્રમે નીચે આપેલા પ્રકારના છે, એવા ત્રિકોણ દોરવાને તમને કહ્યું છે. એ પૈકી કયા ત્રિકોણો કાઢી શકાશે તે કહો:—

	પહેલો ખુણો.	બીજો ખુણો.	ત્રીજો ખુણો.
(૧)	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૨)	કાટખુણો,	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૩)	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૪)	પહોળો ખુણો,	પહોળો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૫)	પહોળો ખુણો,	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૬)	પહોળો ખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.

વ્યાખ્યા.

ત્રિકોણના ખુણા પૈકી કેટલા ખુણા કાટખુણા અથવા પહોળા ખુણા હોઈ શકે? " એક ત્રિકોણમાં એકથી વધારે કાટખુણા હોઈ શકતા નથી "; તેથી—

(૧) ત્રિકોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો તે ત્રિકોણને **કાટખુણ ત્રિકોણ** કહે છે.

ત્રિકોણમાં એકથી વધારે પહોળા ખુણા હોઈ શકતા નથી, તેથી—

(૨) ત્રિકોણનો એક ખુણો પહોળો ખુણો હોય, તો તે ત્રિકોણને **પહોળખુણ ત્રિકોણ** કહે છે.

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા કેટલા સાંકડા ખુણા હોવાજ જોઈએ? " બે. "

હવે કેવા ત્રિકોણને સાંકડખુણ ત્રિકોણ કહેવો જોઈએ?

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે સાંકડા ખુણા હોવા જોઈએ, એમ ઉપર કહ્યું છે; ત્યારે જે ત્રિકોણમાં બેજ ખુણા સાંકડા ખુણા હોય, તેને સાંકડખુણ ત્રિકોણ કહીએ તો ચાલે કે? એમ કહેવામાં શી ભૂલ થશે? ઉપર કહેલા ત્રિકોણોના વર્ગોમાંથી કયા વર્ગના ત્રિકોણનો એ નામમાં ખોટી રીતે સમાવેશ થશે? જે ત્રિકોણને કાટખુણ ત્રિકોણ અથવા પહોળખુણ ત્રિકોણ એ બેમાંથી એકે નામ ન અપાતાં ફક્ત સાંકડખુણ ત્રિકોણ એજ નામ આપી શકાય, એવા ત્રિકોણમાં સાંકડા ખુણા કેટલા હોવા જોઈએ? "ત્રણ." આ પરથી સાંકડખુણ ત્રિકોણની વ્યાખ્યા તમે શી આપશો?

(૩) જે ત્રિકોણના ત્રણે ખુણા સાંકડા હોય છે, તેને **સાંકડખુણ ત્રિકોણ** કહે છે.

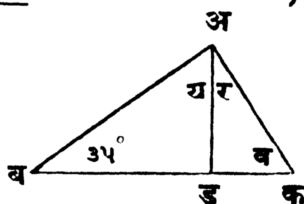
૭૩મા અને ૭૪મા પાના પર આપેલા ત્રિકોણ જુઓ, અને તે પૈકી દરેક ત્રિકોણ, ઉપર કહેલા ત્રણ પ્રકાર પૈકી કયા પ્રકારનો છે તે કહો.

એક કાટખુણ ત્રિકોણનો એક ખુણો નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તો બાકીના ખુણા કેવડા હોય તે કહો:—

૪૦°, ૫૦°, ૬૩°, ૧૭°, ૫૮°, ૨૬°, ૩૯° વગેરે.

ઉપલા પ્રશ્ન પરથી, કાટખુણ ત્રિકોણના સાંકડા ખુણાના સરવાળાના સંબંધમાં કયો નિયમ સમજાય છે? "તેમનો સરવાળો એક કાટખુણો થાય છે, એટલે કાટખુણ ત્રિકોણમાંના સાંકડા ખુણા એક બીજાના કોટિખુણા હોય છે."

પાસેના **अबक** ત્રિકોણમાં ∠**बअक**=૯૦° અને **अड**, **बक** પર લંબ છે. જો ∠**ब**= ૩૫° હોય, તો ∠**य**, ∠**र**, ∠**व** કેવડા હોવા જોઈએ?



ઉપલા પ્રશ્નમાં ∠**વ** નીચે આપેલા અંશનો છે, એમ ધારીને ∠**ય**, ∠**ર**, ∠**વ** ખુણા કાઢોઃ—

૩૦°, ૨૫°, ૩૭°, ૪૫°, ૫૩°.

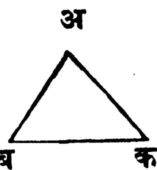
ત્રિકોણના બહારના ખુણા.

એક **અબક** ત્રિકોણ લો. તેની ગમે તે બાજુ (દાખલા તરીકે **બક**)ને **ડ** સુધી વધારો. **અકડ** ખુણાને **અબક** ત્રિકોણનો **બહારનો ખુણો** કહે છે. ત્રિકોણની બધી બાજુઓ બંને છેડા તરફ વધારી હોય, તો છ બહારના ખુણા થાય છે. પણ એવી રીતે જે ખુણા થાય છે, તેમાંથી ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુ આગળ જે સામસામા બબ્બે ખુણા થાય છે, તે એક બીજાની બરાબર હોય છે; માટે આ જોડમાંના ગમે તે એક ખુણાને તે શિરોબિંદુ આગળનો બહારનો ખુણો ગણવાનો રિવાજ છે. તે છતાં પણ કોઈ ત્રિકોણના બહારના ખુણા એટલે કયા ખુણા સમજવા, એ વિષે શક ન પડે, એટલા માટે ત્રિકોણના બહારના ખુણા વિષે નીચેનો સંકેત નક્કી કરેલો છેઃ—

કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓને એકજ ક્રમે વધારી હોય, તો તે બાજુઓ આગળ થતા બહારના ખુણાઓને તે ત્રિકોણના **બહારના ખુણા** કહે છે. દાખલા તરીકે, ૮૧મા પાના ઉપરની આકૃતિમાં **અકઇ**, **બઅફ**, અને **કબગ** એ **અબક** ત્રિકોણના બહારના ખુણા છે.

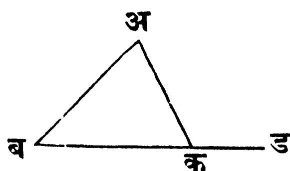
ત્રિકોણના અંદરના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, ત્યારે તે ત્રણ પૈકી બે ખુણાનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો? "ત્રીજો ખુણો."

પાસેની આકૃતિમાં (∠**બઅક**+ ∠**અકબ**)નો ન્યૂનતા-



પૂરક ખુણો કયો ? (∠अकब+∠कबअ)નો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો ? ∠कबअના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા કયા ? ∠बअकના કયા ? ∠अकबના કયા ?

ગમે તે એક **अकब** ત્રિકોણ દોરો. **बक** બાજુને **ड** સુધી લંબાવો. ∠अकब+∠अकड =૨ કાટખુણા, તો ∠अकब·નો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો? "∠अकड." આગલા પ્રયોગ પરથી ત્રિકોણના ખુણા પૈકી કયા ખુણા ∠अकबના ન્યૂનતાપૂરક છે એમ જણાય છે ? "∠कबअ+∠बअक." આ પરથી ∠कबअ, ∠बअक એમનો સરવાળો અને ∠अकड એ બેની વચ્ચે તમને શો સંબંધ જણાય છે ?



આ પરથી ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો અને બહારના ખુણાની પાસેના અંદરના ખુણા સિવાયના બાકીના અંદરના બે ખુણાનો સરવાળો, એમની વચ્ચે તમને શો સંબંધ જણાય છે ?

"ત્રિકોણનો કોઈ પણ બહારનો ખુણો, તેની લગોલગ ન હોય એવા અંદરના બે ખુણાના સરવાળા બરાબર હોય છે."

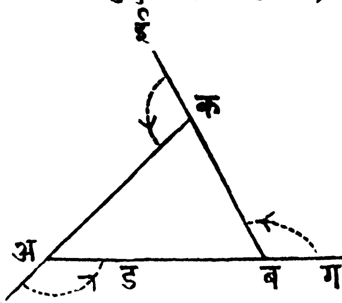
ત્રિકોણના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો.

ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ એક તરફથી વધારી હોય, તો જે બહારના ખુણા થાય છે તે માપો, અથવા તેમને કાપી કાઢીને પાસપાસે મૂકો, અને તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે? "ચાર."

ત્રિકોણમાંનો દરેક ખુણો અને તેની પાસેનો બહારનો ખુણો એ બેનો સરવાળો કેટલો થાય છે ? "બે કાટખુણા." એ પ્રમાણે ત્રિકોણની અંદરના ત્રણ ખુણા અને તેમની પાસેના

બહારના ત્રણ ખુણા, એ બધાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે? "છ." ત્રિકોણના અંદરના ત્રણ ખુણા મળીને જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, ત્યારે આ પરથી બહારના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો કેટલો હોવો જોઈએ, એ વિષે તમે કંઈ અનુમાન કરી શકો છો? "એ સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોવો જોઈએ."

ત્રિકોણના બહારના ખુણા ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ સિદ્ધ કરવા માટે નીચેનો પ્રયોગ કરવો. ધારો કે **अब,बक,कअ** એ ત્રણ રસ્તાથી એક ત્રિકોણ બને છે. **ड** સ્થળથી એક ગાડી **ब** તરફ જવા નીકળે છે. આ ગાડી **ब** પાસે આવશે, એટલે **बक** રસ્તે જવા માટે તેને પોતાનું મોઢું ટપકાંથી દેખાડેલા **ब** ખુણા જેટલું ફેરવવું પડશે. ગાડી **क** પાસે જશે ત્યારે ટપકાંથી દેખાડેલા **क** ખુણા જેટલું તેને પોતાનું મોઢું ફેરવવું પડશે. ગાડી **कअ** રસ્તે **अ** પાસે ગયા પછી ત્યાં તેને ટપકાંથી દર્શાવેલા **अ** ખુણા જેટલું મોં ફેરવવું પડશે. હવે જો ગાડી સીધી આગળ જશે તો તે **ड** બિંદુ પાસે જઈ પહોંચશે.



ધારો કે **बअ** લીટી બરાબર પૂર્વપશ્ચિમ છે. આ પરથી સ્પષ્ટ જણાય છે, કે ગાડી પ્રથમ નીકળી ત્યારે તેનું મોં પૂર્વ તરફ હતું. તે **ब** પાસે ગઈ ત્યારે તેનું મોં ઉત્તર તરફ ફર્યું. તે **क** પાસે ગઈ ત્યારે......વગેરે. એ પ્રમાણે તેનું મોં ધીમે ધીમે ઉત્તર, પશ્ચિમ, દક્ષિણ, એ દિશા તરફ ફર્યું, અને આખરે પૂર્વ તરફ આવ્યું. આ ઉપરથી ગાડીના મોંએ એક પુરી

પ્રદક્ષિણા કર્યા જેવું થાય છે. પૂર્ણ પ્રદક્ષિણા કરી એટલે ચાર કાટખુણામાં થઈને ફર્યા જેવું થાય છે (આ ઘડિઆળના કાંટાની મદદથી બતાવી શકાશે), માટે ગાડીનું મેાં ચાર કાટખુણામાં થઈને ફર્યું છે, એમ માનવાને અડચણ નથી. ગાડીનું મેાં જે ખુણામાં થઈને ફર્યું, તે ખુણા તેા **અબક** ત્રિકેાણના બહારના ખુણા છે. **અબક** ત્રિકેાણ ગમે તે પ્રકારનેા લીધેા હેાય, તેાપણ ઉપર પ્રમાણેજ પરિણામ આવે છે. આ ઉપરથી ત્રિકેાણના બહારના બધા ખુણા મળીને ચાર કાટખુણા બરાબર હેાય છે, એ સિદ્ધ થાય છે.

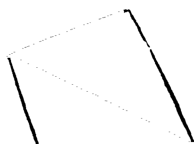
બહુકેાણાકૃતિના બહારના ખુણાએાનેા સરવાળેા.

વ્યાખ્યા—ચારથી વધારે સીધી લીટીએા વડે જેની હદ બંધાઈ હેાય એવી કેાઈ પણ આકૃતિને **બહુકેાણાકૃતિ** કહે છે.

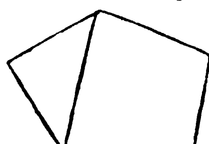
ચાર સીધી લીટીથી જેની હદ બંધાઈ હેાય એવી આકૃતિને **ચતુષ્કેાણ** કે **ચેાખુણ** કહે છે.

પાંચ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને **પંચકેાણ** કહે છે.

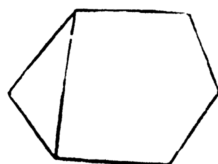
છ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને **ષટ્કેાણ** કહે છે.



ચતુષ્કેાણ.



પંચકેાણ.



ષટ્કેાણ.

સાત સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને **સપ્તકેાણ** કહે છે.

આઠ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને **અષ્ટકેાણ** કહે છે.

ગમે તેવેા એક ચતુષ્કેાણ લેા. તેની બધી બાજુએા એકજ

ક્રમે વધારો. એમ કરવાથી થએલા બધા બહારના ખુણા કાપીને અથવા કોણમાપક વડે માપીને તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે? "ચાર."

એજ પ્રમાણે પંચકોણ, ષટ્કોણ, સપ્તકોણ, અષ્ટકોણ વગેરે આકૃતિઓ લઈને તેમના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. તેમના બહારના ખુણાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે તમને કોઈ નિયમ જણાઈ આવે છે? **"આ સર્વ આકૃતિઓના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય છે."**

૯૧મા પાના પરના ત્રિકોણના સંબંધમાં કરેલા પ્રયોગ જેવો પ્રયોગ કરીને ચતુષ્કોણ, પંચકોણ, ષટ્કોણ વગેરેના બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય છે એ બતાવો.

બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો.

પહેલી રીત—ગમે તેવો એક ચતુષ્કોણ કાઢો. તેની બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારો. એક બાજુ વધારવાથી જે બહારનો ખુણો થાય છે, તે અને તેની પાસેનો આકૃતિનો અંદરનો ખુણો, એ બેનો સરવાળો કેટલો થાય છે? "બે કાટખુણા." એક બાજુ વધારવાથી જે બે ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, ત્યારે ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ વધારવાથી બનેલા બહારના અને અંદરના બધા ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે? "આકૃતિને જેટલી બાજુઓ છે તેટલીના બમણા કાટખુણા બરાબર." તેમાંથી બહારના ખુણાઓનો સરવાળો બાદ કરો. બાદબાકી રહી તે શાનો સરવાળો આવ્યો? "અંદરના ખુણાઓનો." તે કેટલો છે? "ચાર કાટખુણા."

એજ પ્રમાણે પંચકોણ, ષટ્કોણ વગેરેના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો.

પંચકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો ?

(૫×૨=૧૦; ૧૦−૪=૬)

ષટ્કોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો ?

(૬×૨=૧૨; ૧૨−૪=૮)

સપ્તકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો ?

(૭×૨=૧૪; ૧૪−૪=૧૦)

પંદર બાજુવાળી આકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો..........વગેરે.

આ પરથી ગમે તે બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓના સરવાળા માટે શો નિયમ નીકળે છે ? **"બાજુની બમણાઈ કરી તેમાંથી ચાર બાદ કરવા; બાદબાકી આવે તેટલા કાટખુણા સમજવા."**

કોઈ પણ બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે એ કાઢવાની **બીજી રીત**—

કોઈપણ આકૃતિનો પહેલો અને ત્રીજો એ ખુણા સાંધવા, અને નીચેની રીતે ખુણાઓનો સરવાળો કરવો.

ચતુષ્કોણ=૨ ત્રિકોણ; ખુણાનો સરવાળો=૨+૨ કાટખુણા= ૪ કાટખુણા.

પંચકોણ=ત્રિકોણ+ચતુષ્કોણ; ખુણાનો સરવાળો=૨+૪ કાટખુણા=૬ કાટખુણા.

ષટ્કોણ=ત્રિકોણ+પંચકોણ; ખુણાઓનો સરવાળો=૨+૬ કાટખુણા=૮ કાટખુણા.

સપ્તકોણ=ત્રિકોણ+ષટ્કોણ; ખુણાઓનો સરવાળો=૨+૮ કાટખુણા=૧૦ કાટખુણા.

ત્રીજી રીત—ત્રિકોણની અંદરના બધા ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે એ સિદ્ધ કરવા માટે પહેલાં

જે પેન્સિલનો પ્રયોગ કર્યો છે, તે ચતુષ્કોણ, પંચકોણ, ષટ્કોણ, સપ્તકોણ વગેરે આકૃતિઓના સંબંધમાં કરો; અને પેન્સિલની અણીની પ્રદક્ષિણા કેટલી થાય છે તે જુઓ. આ પરથી બહુકોણાકૃતિના ખુણાના સરવાળાના સંબંધમાં ઉપર જે નિયમ આપ્યો છે તે સિદ્ધ થશે.

ચોથી રીત—આપેલી (**क्ष** બાજુની) બહુકોણાકૃતિની અંદર એક **अ** બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી બહુકોણાકૃતિનાં શિરોબિંદુઓ સુધી લીટીઓ દોરો. એટલે બહુકોણાકૃતિને જેટલી બાજુ છે તેટલા (એટલે **क्ष**) ત્રિકોણ થશે. તે ત્રિકોણોના ખુણાનો સરવાળો=**क्ष**×૨ કાટખુણા. તેમાંથી **अ** બિંદુ પાસેના ખુણા=૪ કાટખુણા. માટે બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાનો સરવાળો=(**क्ष**×૨)–૪ કાટખુણા છે.

પ્રશ્ન.

अबकड ચતુષ્કોણના ∠**अ**, ∠**ब**, ∠**क** અનુક્રમે–

૪૫, ૫૫, ૧૦૦
૧૦૦, ૫૦, ૧૧૦
૧૨૦, ૧૦૦, ૧૨૦ } અંશના છે, તો ∠**ड** કેટલા અંશનો?

એક ચતુષ્કોણના બે ખુણા ૧૦૦° અને ૪૦° છે, અને બાકીના ખુણા સરખા છે; તો તે કેટલા કેટલા અંશના છે ?

ઉપલા પ્રશ્નમાં પહેલા બે ખુણા અનુક્રમે ૫૩° અને ૨૭°, ૯૦° અને ૮૦°, ૧૧૦° અને ૨૮° ધારીને ઉત્તર આપો.

નિયમિત* પંચકોણનો દરેક ખુણો કેવડો હોય છે ?

નિયમિત ષટ્કોણનો કેવડો ? નિયમિત સપ્તકોણનો કેવડો ? નિયમિત અષ્ટકોણનો કેવડો ?

---

* જે આકૃતિની બધી બાજુઓ સરખી અને બધા ખુણા સરખા હોય તેને **નિયમિત આકૃતિ** કહે છે.

નિયમિત પંચકોણ, ષટ્કોણ, અષ્ટકોણ, અને દશકોણનો બહારનો દરેક ખુણો કેટલા અંશનો હોય છે?

એક ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખુણાનો સરવાળો ૧૫૦° છે, તો બાકીના બે ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો કેવડો છે?

એક પંચકોણના ચાર ખુણા સરખા છે, અને પાંચમો ખુણો બાકીના દરેક ખુણાથી અર્ધો છે; તો તે ખુણો કેટલા અંશનો હોવો જોઈએ?

अबकडईफ ષટ્કોણમાંના **अ**, **क**, અને **ई** ખુણા સરખા છે, અને તેમાંનો દરેક ખુણો **ब**, **ड**, કે **फ** ખુણાથી બમણો છે (અર્થાત્ **ब**, **ड**, અને **फ** એક બીજાની બરાબર છે); તો **अ** ખુણો કેવડો છે?

એક બહુકોણાકૃતિનો દરેક ખુણો $1\frac{3}{4}$ કાટખુણા બરાબર છે, તો તે આકૃતિને બાજુઓ કેટલી? (બહારનો ખુણો કેવડો છે તે નક્કી કરી તે ઉપરથી બાજુઓની સંખ્યા નક્કી કરો.)

ત્રિકોણોની એકરૂપતા.*

(ત્રિકોણ એકરૂપ સિદ્ધ કરવા માટે કઈ શરતો જરૂરની છે એ વિષે.)

अब અને **डई** એ સરખી લીટીઓ લો. **अब**ના **ब** બિંદુ પાસે ગમે તેટલો મોટો ∠**अबक** ખુણો કરો. ∠**डईफ**, ∠**अबक** જેવડો કરો. **बक** ગમે તેટલી લાંબી લો. તેટલીજ લાંબી **ईफ** લો. **कअ**, **फड** સાંધો. **अब**, **डई** પર અને **बक**, **ईफ** પર પડે એવી રીતે **अबक** ત્રિકોણ **डईफ** ત્રિકોણ પર મૂકો. બંને ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે? "છે." (પુ૦). આ પરથી

---

* એકરૂપ એટલે બધી બાબતમાં સરખા. બધી બાબતો એટલે ખુણા, બાજુઓ, અને ક્ષેત્રફળ.

ત્રિકોણોની એકરૂપતા વિષે કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે?

"એક ત્રિકોણની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો અનુક્રમે બીજાની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેના ખુણાની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે."

अब જેવડી **डई** લીટી લો. ∠**अबक**, ∠**बअक** ગમે તેટલા મોટા ખુણા લઈને **अबक** ત્રિકોણ પુરો કરો. ∠**अबक**, ∠**बअक** જેવડા અનુક્રમે ∠**डईफ**, ∠**ईडफ** કરો. **अब**, **डई** પર અને **बक**, **ईफ** પર પડે એવી રીતે **अबक** ત્રિકોણ **डईफ** ત્રિકોણ પર મૂકો. (પુ૦). તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે? "છે." આ ઉપરથી તમે કયો સામાન્ય નિયમ શીખ્યા?

"એક ત્રિકોણની એક બાજુ અને તેના છેડાની પાસેના બે ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની એક બાજુ અને તેના છેડાની પાસેના બે ખુણાની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે."

એક ગમે તેવો **अबक** ત્રિકોણ દોરો. **डई** બાજુ **अब** જેવડી દોરો. **डईफ** ખુણો **अबक** ખુણા જેવડો કરો. **अकब** ખુણા જેવડો કાગળનો કડકો કાપી કાઢો. આ ખુણો **ईफ**ને લગાડીને એવી લીટી દોરો, કે તે **ईफ**ની સાથે ∠**अकब** જેવડો ખુણો કરે. એ લીટી **ड**માં થઈને જશે. એવી રીતે **डईफ** ત્રિકોણ દોર્યા પછી **अब**, **डई** પર અને **बक**, **ईफ** પર પડે એવી રીતે **अबक** ત્રિકોણ **डईफ** ત્રિકોણ પર મૂકો. બંને ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે? "છે." (પુ૦). આ ઉપરથી તમે કયો સામાન્ય નિયમ શીખ્યા?

"એક ત્રિકોણના બે ખુણા અને તેમાંના એકની સામેની બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના તેમને

મળતા ભાગોની (એટલે બીજાના બે ખુણા અને પહેલા ત્રિકોણના જે ખુણાની સામેની બાજુ લીધી છે તે ખુણાની બરાબર બીજા ત્રિકોણનો જે ખુણો છે તેની સામેની બાજુની) બરાબર હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે."

ઉપલા બધા પ્રયોગો પરથી, બે ત્રિકોણ એકરૂપ થવા માટે એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ અને ત્રણ ખુણા એ પૈકી ઓછામાં ઓછા કેટલા ભાગ મળતા આવવાજ જોઈએ, તે કહો. "ત્રણ." કયા ત્રણ? (૧) "બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો; (૨) એક બાજુ અને બે ખુણા."

ત્રિકોણમાં સરખી બાજુની સામેના ખુણા અને સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ.

બે બાજુ સરખી લંબાઈની અને ત્રીજી બાજુ જરા નાની કે મોટી લઈને એક ત્રિકોણ કરો. સરખી બાજુ એક બીજી પર પડે એવી રીતે ત્રિકોણ વાળો; એટલે સરખી બાજુની સામેના ખુણા એક બીજા પર બરાબર આવી રહેશે. (પુ૦). આ ઉપરથી સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાંના સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા સરખા હોય છે, એમ જણાઈ આવશે. સરખા બાજુઓની સામેના ખુણા કોણમાપક વડે માપો, અને તેમને સરખાવો. તમને શું જણાય છે? "તે સરખા છે." આ ઉપરથી ત્રિકોણમાંની સરખી બાજુની સામેના ખુણા વિષે તમને કયો નિયમ મળે છે? **"સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા સરખા હોય છે."**

એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો. તેના ખુણા પર નિશાની કરો અને તે કાપી કાઢો. તેમને એક બીજા જોડે સરખાવો. આ ખુણા વિષે તમને શું જણાઈ આવે છે? "દરેક ખુણો ૬૦°નો છે."

આ ઉપરથી સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા વિષે તમને કયો નિયમ મળી આવે છે? **“સમબાજુ ત્રિકોણના બધા ખુણા સરખા હોય છે, અને દરેક ખુણો ૬૦°નો હોય છે.”**

એક ગમે તેટલી લાંબી **अब** લીટી લેા. ∠**अबक** ગમે તેવડો સાંકડો ખુણો લેા. ∠**अबक** જેવડો ∠**बअक** કરો. **अक** અને **बक** માપો. આ પ્રયેાગ ત્રણ ચાર વખતે જુદી જુદી રીતે કરો. ત્રિકોણના બે સરખા ખુણાઓની સામેની બાજુઓ કેવી હોય છે, એ વિષે તમને શું સમજાય છે?

“ત્રિકોણમાંના સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખી હોય છે.”

अब=૨″, ∠**अबक**=૬૦°, અને ∠**बअक**=૬૦° લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. **बक**, **अक** માપો. તેમની લંબાઈ **अब** સાથે સરખાવો. ∠**बकअ** કેવડો છે? (પુ૦). **अब**=૧″, ∠**अबक**=૬૦° અને ∠**बअक**=૬૦° લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. **बक**, **अक** માપો. તેમની લંબાઈને **अब** જોડે સરખાવો. ∠**बकअ** કેવડો છે? આ ઉપરથી, જે ત્રિકોણના બે ખુણા ૬૦, ૬૦ અંશના હોય છે, તે વિષે તમને કયો નિયમ મળી આવે છે? “તેનો ત્રીજો ખુણો ૬૦°નો હોય છે અને તેની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે.” સમબાજુ ત્રિકોણને વાળીને તેના બે સરખા ભાગ કરો. એમાંનો દરેક ભાગ કાટખુણ ત્રિકોણ છે, અને તેના બે સાંકડા ખુણા અનુક્રમે ૩૦° અને ૬૦°ના છે, એમ જણાઈ આવશે. આ ત્રિકોણોમાં ૩૦°ના ખુણાની સામેની બાજુ કર્ણથી અર્ધી હોય છે.

(૧) **बक**=૨″, ∠**ब**=૯૦°, ∠**क**=૬૦°

(૨) **बक**=૪″, ∠**ब**=૯૦°, ∠**क**=૬૦°

(૩) **बक**=૨·૫″, ∠**ब**=૯૦, ∠**क**=૬૦°

લઈને ત્રિકોણ કરો. **अक** કેટલા ઇંચ છે? **अक**ની સાથે **बक** સરખાવો, અને આ ઉપરથી કાટખુણ ત્રિકોણના સાંકડા

ખુણા ૬૦° અને ૩૦°ના હોય, તો ૯૦° અને ૩૦°ના ખુણાની સામેની બાજુઓ શા પ્રમાણમાં હોય છે, એ વિષે જે નિયમ સમજાતો હોય તે કહો.

"જો કાટખુણ ત્રિકોણમાંનો એક સાંકડો ખુણો ૩૦°નો હોય, તો તે ખુણાની સામેની બાજુ કર્ણથી અર્ધી હોય છે."

એકરૂપ ત્રિકોણોનાં બીજાં લક્ષણ.

૧", ૨", ૨.૨"ની બાજુઓ લઈને ત્રિકોણ કરો. એજ બાજુઓ (એટલે એટલીજ લાંબી બાજુઓ) લઈને બીજો ત્રિકોણ કરો. આ ત્રિકોણ પહેલા ત્રિકોણ પર, સરખી બાજુઓ એક બીજી પર પડે એવી રીતે મૂકી જુઓ. આ બે ત્રિકોણોમાં કોઈ પણ બાબતનો તફાવત કે અસમાનપણું છે કે? ગમે તેવડી બાજુઓ લઈને એક ત્રિકોણ કરો. તેજ બાજુઓ ગમે તે ક્રમે લઈને બીજો ત્રિકોણ કરો. આ ત્રિકોણ પહેલા ત્રિકોણ પર એવી રીતે મૂકવાનો પ્રયત્ન કરો, કે તે નીચેના ત્રિકોણ પર બરાબર આવી રહે. એવી રીતે ત્રિકોણ મૂકી શકાય છે કે? જેમની બાજુઓ અનુક્રમે સરખી હોય એવા ત્રિકોણોના સંબંધમાં ઉપલા પ્રયોગ પરથી તમને કયો નિયમ મળી આવે છે?

"એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે."

જેમાં ∠ **अबक** કાટખુણો હોય એવો એક ગમે તે **अबक** કાટખુણ ત્રિકોણ લો. **डईफ** કાટખુણો દોરો. **ईफ**માંથી **बक** બરાબર **ईग** ભાગ કાપી કાઢો. **ग** મધ્યબિંદુ ધારીને **कअ** ત્રિજ્યાએ વર્તુળ દોરો. ધારો કે તે **ईड**ને **ह** બિંદુમાં છેદે છે. **गह** સાંધો.

अबक અને **हईग** આ કાટખુણ ત્રિકોણોમાં રચના પ્રમાણે **अक** કર્ણ=**हग** કર્ણ, અને **बक**=**ईग** બાજુ છે.

∠**बअक**, ∠**ईहण** માપો અને તેમને સરખાવો. ∠**अकब**, ∠**हगई** માપો અને તેમને સરખાવો. **अब**, **हई** માપો અને તેમને સરખાવો. સરખામણી પરથી શું જણાઈ આવે છે?

જેમનાં કર્ણ અને ફક્ત એકેક બાજુ સરખાં હોય, એવા કાટખુણ ત્રિકોણોની જોડો લઈને ઉપલો પ્રયોગ અનેક વાર કરો. આ ઉપરથી તમને કયો નિયમ જણાઈ આવે છે?

"જો એક કાટખુણુ ત્રિકોણુનો કર્ણ અને એક બાજુ બીજા કાટખુણુ ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુની અનુક્રમે બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે."

ત્રિકોણમાંના ખુણા અને બાજુઓના નાનામોટાપણાનો તેમની સામેની બાજુઓ અને ખુણાઓના નાનામોટાપણા સાથે સંબંધ.

વિષમ બાજુઓવાળો એક ત્રિકોણ દોરો. નાની બાજુની સામેનો ખુણો કાપી કાઢો. તેને મોટી બાજુની સામેના ખુણા પર મૂકી જુઓ, અને બેને સરખાવો. તમને કયો ખુણો મોટો જણાય છે? "મોટી બાજુની સામેનો." બીજો વિષમબાજુ ત્રિકોણ કરો, તેની નાની બાજુની સામેનો ખુણો કોણમાપકથી માપો. પછી મોટી બાજુની સામેનો ખુણો કોણમાપકથી માપો. તમને શું જણાય છે? (પુ૦). ત્રિકોણની નાની મોટી બાજુઓની સામેના ખુણા વિષે કયો સામાન્ય નિયમ ઉપલા પ્રયોગ પરથી જણાઈ આવે છે?

"ત્રિકોણની બે નાની મોટી બાજુઓમાંથી જે મોટી હોય છે, તેની સામેનો ખુણો નાની બાજુની સામેના ખુણાથી મોટો હોય છે."

अब ગમે તેટલી લાંબી લો. **अबक** ગમે તેવડો સાંકડો ખુણો લો. ∠**अबक**થી મોટો ∠**बअक** લો. **अक**, **बक**

માપો. મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી છે, કે નાના ખુણાની સામેની? **अब** ગમે તેટલી લાંબી લો. **अबक** ખુણો ગમે તેવડો લો. ∠**बअक**, ∠**अबक**થી નાનો લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. **अक, बक** માપો. મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી છે, કે નાના ખુણાની સામેની ? આ ઉપરથી તમને કયો સામાન્ય નિયમ સમજાય છે?

"ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા ખુણાથી મોટો હોય, તો મોટા ખુણાની સામેની બાજુ નાના ખુણાની સામેની બાજુથી મોટી હોય છે."

	પહોળખુણ ત્રિકોણ.	સાંકડખુણ ત્રિકોણ.	કાટખુણ ત્રિકોણ.
સમબાજુ ત્રિકોણ.			
સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ.			
વિષમબાજુ ત્રિકોણ.			

ઉપર ત્રિકોણના જુદા જુદા પ્રકાર એક નીચે એક આપ્યા છે, અને તેમની આગળ ખાનાં પાડીને, તે ખાનાં કયા ધર્મ દર્શાવનારાં છે તે, તે ખાનાંની ઉપલી બાજુએ લખ્યું છે. મથાળે જણાવેલા ધર્મ જે ત્રિકોણને પુરેપુરા લાગુ પડતા હોય, તે ત્રિકોણોની સામેના તે ધર્મ દર્શાવનાર ખાનામાં 'હા' એમ લખો; અને તે ધર્મ જે ત્રિકોણને કદાચ લાગુ પડે એમ તમને લાગતું હોય તેમની સામેના તે ધર્મ દર્શાવનારા ખાનામાં "હોઈ શકે" એમ લખો.

ત્રિકોણની એક બાજુનો, બીજી બાજુઓના સરવાળા તથા બાદબાકી સાથેનો સંબંધ.

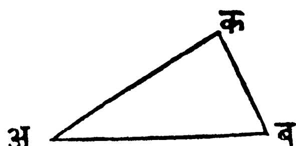
फ ड अ ब

એક **अब** લીટી લો. તેને **अ** તરફ **फ** સુધી લંબાવો.

અફમાં **ડ** બિંદુ લેા. **અ** મધ્યબિંદુ અને **અડ** ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરેા. **બ** મધ્યબિંદુ અને **બઅ+અડ** (=**બડ**) કરતાં મેાટી (દાખલા તરીકે **બફ**) ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરેા. આ વર્તુળ પહેલા વર્તુળને છેદે છે કે? "ના." શા માટે? "**બફ** ત્રિજ્યા **બઅ+અડ** કરતાં વધારે છે તેથી." આ વર્તુળ પહેલા વર્તુળને છેદે એમ કરવું હેાય તેા તેની ત્રિજ્યા કેવડી લેવી જોઈએ? "**બડ** કરતાં નાની." (પ૦). **બડ** કરતાં નાની ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરેા. ધારેા કે તે વર્તુળ પહેલાને **ગ** બિંદુમાં છેદે છે. હવે **ગ** બિંદુ **અ** ને **બ** સાથે સાંધવાથી જે ત્રિકેાણ થાય છે તેમાં **અબ** તેા પાયેાજ છે, અને **ગઅ**, **અડ** બરેાબર છે, અને **ગબ**, **અબ+અડ**ના સરવાળા કરતાં નાની છે. આ પરથી માલમ પડશે કે જો ત્રીજી લીટી **અબ+અડ**ના સરવાળા કરતાં એાછી હેાય, તેાજ એ વર્તુળેા એક બીજાને છેદી શકે છે, એટલે આપેલી બાજુએાવાળેા ત્રિકેાણ બની શકે છે. આ ઉપરથી, જેની બે બાજુએાના સરવાળા કરતાં ત્રીજી બાજુ મેાટી હેાય એવેા ત્રિકેાણ દોરી શકાય કે કેમ, એ વિષે શેા નિયમ નીકળે છે?

અબ=૩", **બક**=૨", અને **કઅ**=·૮" લઈને તમે ત્રિકેાણ દોરી શકશેા? **અબ**=૩", **બક**=૨" અને **કઅ**=૧" લઈને ત્રિકેાણ દોરી શકશેા કે? "ના." શા માટે નહિ? આકૃતિ દોરવાનેા પ્રયત્ન કરેા. ત્રિકેાણ બની શકે એટલા માટે **કઅ**ની લંબાઈ એાછામાં એાછી કેટલી લેવી જોઈએ?

પાસેની આકૃતિમાં **અ** અને **બ** બિંદુએાની વચ્ચે કેટલું અંતર છે? **અ**થી **બ** સુધી **અબ** સીધી લીટી દોરવાને બદલે **અકબ** જેવી વાંકી લીટી દોરી હેાય, તેા તેની લંબાઈ **અબ**થી વધારે થશે કે એાછી? "વધારે; કારણ



કે **अकब** વાંકી છે.” **ब** અને **क** વચ્ચેનું અંતર માપો. એ બે બિંદુઓ વચ્ચે **बअक** જેવી લીટી દોરી હોય, તો તે **बक**થી નાની થશે કે મોટી? “મોટી; કારણ કે **बक** સીધી લીટી છે, અને **बअक** વાંકી લીટી છે.” એજ પ્રમાણે **क** અને **अ** વચ્ચે અંતર કેટલું છે? **क**થી **अ** સુધી **कअ** સીધી લીટી ન દોરતાં **कबअ** જેવી વાંકી લીટી દોરી હોય તો તેની લંબાઈ **कअ**થી વધારે થશે કે ઓછી? “વધારે; કારણ કે **कबअ** વાંકી લીટી છે.” ત્રિકોણની કોઈ પણ એક બાજુ અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો, એ બેમાં કોની લંબાઈ વધારે હોય છે? આ ઉપરથી ત્રિકોણની બે બાજુનો સરવાળો અને ત્રીજી બાજુ એમની વચ્ચે શો સંબંધ જણાય છે?

“ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજીથી વધારે હોય છે.”

ત્રિકોણની એક બાજુ ૪″ અને બીજી ૨″ હોય તો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી કેટલી હોવી જોઈએ? “બે ઇંચ કરતાં વધારે.” શા માટે? “કેમકે બે ઇંચ કરતાં વધારે ન લઈએ, એટલે દાખલા તરીકે ૧॥ ઇંચ લઈએ તો બે લીટીઓનો સરવાળો ૨+૧॥=૩॥ એ ત્રીજી ૪ ઇંચ લાંબી લીટી કરતાં વધતો નથી.” (૫૦). આ ઉપરથી ત્રિકોણની બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે કે ઓછી, એ વિષે શું સમજાય છે? **“ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુ કરતાં ઓછી હોય છે.”**

ત્રિકોણોનું નાનામોટાપણું.

∠**अबक** ગમે તેવડો લો. **अब** જેટલી **डई** બાજુ લો. **ई** બિંદુ પાસે ∠**डईफ**, ∠**अबक**થી નાનો કરો. **ईफ**,

बकની બરાબર કરો. **डफ** અને **अक** સાંધો. **अक**, **डफ** કરતાં નાની છે કે મોટી? ∠**अबक** ગમે તેવડો દોરો. **अब** જેવડી **डई** લીટી લો. **ई** બિંદુ આગળ ∠**डईफ**, ∠**अबक**થી મોટો કરો. **ईफ**, **बक**ની બરાબર કરો. **अक**, **डफ** સાંધો. **अक**, **डफ**થી નાની છે કે મોટી?

એક કાગળના કડકામાંથી બે નાના મોટા ખુણા કાપી કાઢો. બે નાની મોટી સળીઓ લો, અને તેવીજ એક બીજી જોડ લો. તેમાંથી એક જોડ લઈને તે (બે) સળીઓના છેડા એવી રીતે રાખો કે તે બે સળીઓની વચ્ચે કાગળના ખુણામાંના નાના ખુણા જેવડો ખુણો થાય. બીજી જોડ લો, અને તે બે સળીઓના છેડા એવી રીતે રાખો કે તે બે સળીઓની વચ્ચે કાગળના મોટા ખુણા જેવડો ખુણો થાય. કયું અંતર વધારે મોટું છે? પહેલી બે સળીઓના બીજા છેડા વચ્ચેનું, કે બીજી બે સળીઓના બીજા છેડા વચ્ચેનું? ઉપર વર્ણવેલા પ્રયોગ પરથી તમને શું સમજાય છે?

“ જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓની બરોબર હોય, પણ પહેલાની બે બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો બીજાની બે બાજુઓ-ની વચ્ચેના ખુણાથી મોટો હોય, તો પહેલાનો પાયો બીજાના પાયાથી મોટો હોય છે. ”

ગમે તે લંબાઈની **अब**,**बक** લીટીઓ લઈને એક ત્રિકોણ કરો. **डई**,**ईफ** લીટીઓ અનુક્રમે **अब**,**बक** જેવડી લઈને ગમે તેવો એક બીજો ત્રિકોણ કરો. **अक**,**डफ**માંથી કઈ બાજુ મોટી છે? ∠**अबक**, ∠**डईफ** માપો. કયો ખુણો મોટો છે? **अक**, **डफ**ના નાનામોટાપણા સાથે ∠**अबक**, ∠**डईफ**ના નાનામોટાપણાનો કંઈ પણ સંબંધ છે? “ હા. ” (૫૦). ગમે તેટલી લાંબી બે સળી લો. તેટલીજ લાંબી

બીજી બે સળી લો. બે નાની મોટી સળી લો. તેમાંથી નાની સળી અને સળીઓની પહેલી જોડનો એક ત્રિકોણ કરો. મોટી સળી અને સળીઓની બીજી જોડનો બીજો એક ત્રિકોણ કરો. બે ત્રિકોણમાંથી એકની બે બાજુ બીજાની બે બાજુઓની બરાબર છે, પણ એકનો પાયો બીજાના પાયાથી મોટો છે. આ પાયાની સામેના શિરોબિંદુ આગળના ખુણા માપો. કયો ખુણો મોટો છે? આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ સમજાય છે?

"જો બે ત્રિકોણમાંથી એકની બે બાજુઓ બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ પહેલાનો પાયો બીજાના પાયાથી મોટો હોય, તો જે ત્રિકોણનો પાયો મોટો છે તેના પાયાની સામેનો ખુણો, નાના પાયાવાળા બીજા ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાથી મોટો હોય છે."

ત્રિકોણના બીજા કેટલાક ધર્મ.

એક કાગળના કડકામાંથી એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાપી કાઢો. તેને (મધ્ય ભાગમાં) વાળીને શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ કરો. લંબથી પાયાના જે બે ભાગ થાય છે તેમને સરખાવો. (પુ૦). શું જણાય છે? **"સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ દોર્યો હોય, તો પાયાના બે સરખા ભાગ થાય છે."**

એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ લો. તેનો પાયો વાળીને દુભાગો. ત્રિકોણને વાળીને પાયાના મધ્યબિંદુથી શિરોબિંદુ સુધી લીટી (અલબત સળરૂપે) દોરો. આ લીટીના પાયાની સાથે જે બે ખુણા થાય છે, તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો, અને શું જણાય છે તે જુઓ. (પુ૦). "સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં શિરોબિંદુમાંથી પાયાના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી

પાયાની સાથે જે બે ખુણા કરે છે, તે કાટખુણા હોય છે અને (અલબત) સરખા હોય છે."

એજ નિયમ સમબાજુ ત્રિકોણને લાગુ પડે છે કે? "પડે છે." શા માટે?

એક ત્રિકોણની બધી બાજુઓને દુભાગો, અને ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ (એટલે મધ્યગા*) દોરો. (પુ૦). આ લીટીઓનાં છેદનબિંદુઓ વિષે શી ખાસ બાબત જણાઈ આવે છે? **"ત્રિકોણની બધી મધ્યગાઓ એક બીજીને એકજ બિંદુમાં છેદે છે."**

આ લીટીઓ એક બીજીને છેદીને તેમના જે બબ્બે ભાગ કરે છે તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. (પુ૦). તમને શું દેખાય છે? **"મધ્યગાનો ઉપલો ભાગ પાયા તરફના ભાગથી બમણો હોય છે."**

ત્રિકોણની ગમે તે બે બાજુઓને દુભાગો, ને તેમનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી દોરો. આ લીટી, દુભાગેલી લીટીઓના શિરોબિંદુ તરફના ભાગો સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમને પાયા આગળના ખુણાઓની સાથે સરખાવો. તેમજ આ લીટીની લંબાઈને પાયા સાથે સરખાવો. (પુ૦). આ ઉપરથી તમને પાયો અને આ લીટીની વચ્ચે શો સંબંધ જણાય છે? **"ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે અને તેનાથી અર્ધી હોય છે."**

ધડી વાળીને ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગો. દુભાગનારાં બિંદુઓ ઘડી વાળીને સાંધો. આ ઘડીઓને લીધે ત્રિકોણના જે ચાર ભાગ થાય છે, તેમને કાપી કાઢો. તેમને એક બીજા પર મૂકીને સરખાવો. (પુ૦). તમને શું જણાય છે? "તે બધા એકરૂપ છે."

---

* ત્રિકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી ત્રિકોણની **મધ્યગા** કહેવાય છે.

ત્રિકોણની એક બાજુને એવી રીતે વાળો, કે તેના બે છેડા એક બીજા પર બરાબર આવી રહે. વાળવાથી પડેલો સળ તે બાજુને કાટખુણે દુભાગે છે. એજ પ્રમાણે બીજી બાજુને વાળો, અને પછી ત્રીજી બાજુને વાળો. આ બધા સળો એક બીજાને ક્યાં મળે છે, એ વિષે જે ખાસ બાબત જણાઈ આવતી હોય તે કહો. તેઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે કે? "હા." (પુ૦). આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે? ત્રિકોણની બે બાજુઓ પર તેમનાં મધ્યબિંદુઓમાંથી બે લંબ દોરો. તે જ્યાં મળે છે ત્યાંથી ત્રીજી બાજુના મધ્ય-બિંદુ સુધી લીટી દોરો. આ લીટી ત્રીજી બાજુની સાથે કેવડો ખુણો કરે છે? આ પરથી કયો નિયમ નીકળે છે?

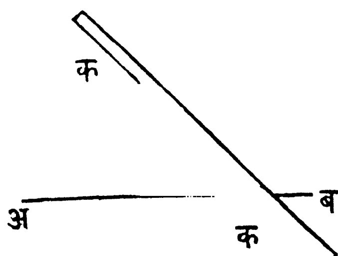
"ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગનારા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે."

ત્રિકોણના ખુણા ઘડી વાળીને દુભાગો. ખુણાઓને દુભાગ-નારી લીટીઓ એક બીજીને ક્યાં મળે છે, એ વિષે જે કંઈ ખાસ બાબત જણાઈ આવતી હોય તે કહો. "તે બધી એકજ બિંદુમાં મળે છે."

લંબ.

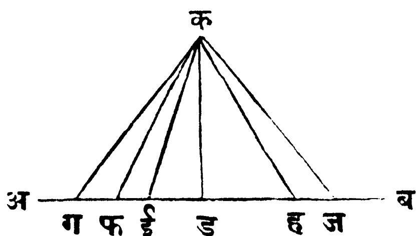
આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર લંબ દોરવાની રીતઃ—

ધારો કે **अब** આપેલી લીટી છે, અને **क** આપેલું બિંદુ છે. ત્રિકોણ-માપની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ **अब**ને લગાડીને માપ **अब**ની ઉપર કે નીચે રાખો. પછી માપના



કર્ણને (એટલે કાટખુણાની સામેની બાજુને) લગાડીને ફુટપટી મૂકો. પછી ત્રિકોણમાપની કાટખુણો કરનારી બીજી બાજુ આપેલા બિંદુને બરાબર અડકી રહે ત્યાંસુધી માપને પટીની બાજુએ ને બાજુએ (જરૂર પ્રમાણે ઉપર કે નીચે) ખસેડો, અને આપેલા બિંદુમાંથી માપની બાજુની લગોલગ લીટી દોરો.

अब લીટી પર **कड** લંબ દોરો. પછી **क** બિંદુમાંથી **कई, कफ, कग,** ગમે તે બીજી લીટીઓ **अब**ને મળે એમ દોરો. **कड**ની લંબાઈ માપો. પછી **कई, कफ, कग**ની લંબાઈ માપો. આ લીટીઓમાં સૌથી નાની લીટી કઈ? "લંબ." **क** બિંદુમાંથી **अब** સુધી લંબથી નાની લીટી દોરી શકાશે કે? "ના."



આ ઉપરથી, કોઈ એક બિંદુમાંથી એક લીટી સુધી જેટલી લીટીઓ દોરી શકાય, તેમાં સૈાથી નાની લીટી કઈ, એ વિષે શો નિયમ સમજાય છે? "**લંબ સૈાથી નાની લીટી હોય છે.**"

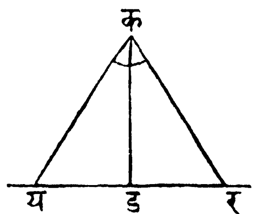
डकई અને **डकफ** ખુણા પૈકી મોટો ખુણો કયો? **कई** અને **कफ** આ લીટીઓમાં મોટી લીટી કઈ? તેમજ **डकह** અને **डकज** એ ખુણાઓમાં મોટો ખુણો કયો? **कह, कज**માં મોટી લીટી કઈ? **क**માંથી **अब** લીટીને મળનારી જે લીટીઓ દોરી છે, તે લીટીઓ **कड** લંબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમાં **डकई** ખુણા કરતાં **डकफ** ખુણો મોટો છે, અને **डकफ** કરતાં **डकग** મોટો છે; અને **कई**થી **कफ**

લીટી મોટી છે, અને **કફ**થી **કગ** મોટી છે. આ ઉપરથી કોઈ એક બિંદુમાંથી કોઈ લીટી સુધી દોરેલી લીટીઓ તેજ બિંદુમાંથી તે લીટી પર દોરેલા લંબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તે ખુણાઓનો તે લીટીઓની લંબાઈની સાથે શો સંબંધ જણાય છે?

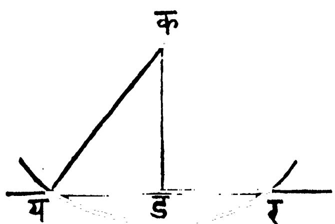
"આ ખુણો જેમ મોટો તેમ તે લીટી લાંબી હોય છે."

ઉપલી આકૃતિમાં ∠**कईड**, ∠**कफड**, ∠**कगड** એ ખુણાનું નાનામોટાપણું અને **कई**, **कफ**, **कग** લીટીઓનું નાનામોટાપણું એ બે વચ્ચે તમને કંઈ સંબંધ જણાઈ આવે છે? **"લંબ તરફનો ખુણો જેમ નાનો તેમ ખુણો કરનારી લીટી લાંબી હોય છે."***

यर લીટી પર દોરેલા **कड** લંબની સાથે ગમે તે **डकय** ખુણો કરો. ∠**डकय** બરાબર ∠**डकर** કરો. **कय** અને **कर** માપો. તેમને સરખાવો. આ ઉપરથી લંબની સાથે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓના સંબંધમાં તમને શું જણાઈ આવે છે? **"લંબની જોડે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓ સરખી હોય છે."**



એક આડી લીટીમાં ગમે ત્યાં **र** બિંદુ લો. તેના પરના લંબમાંના **क** બિંદુને મધ્યબિંદુ લઈને **कर** ત્રિજ્યાએ, આડી લીટીને **य** બિંદુમાં છેદે એવો **रय** કાંસ દોરો. **कय**, **कर**



* તેમ છતાં પણ ઉપલા બે પ્રયોગ પરથી એમ સિદ્ધ થતું નથી કે ખુણાના પ્રમાણમાંજ લીટીની લંબાઈ હોય છે, એટલે ખુણો દોઢગણો મોટો હોય તો લીટી દોઢગણી મોટી કે નાની હોય.

સાંધો. ∠ङकय, ∠ङकरने સરખાવો. તમને શું જણાઈ આવે છે ?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, કોઈ લીટી પર દોરેલા લંબના કોઈ એક બિંદુમાંથી તે લીટી સુધી સરખી લીટીઓ દોરી હોય, તો તેઓ લંબ સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમના સંબંધમાં શો નિયમ જણાય છે ? **“ આપેલી લીટી સુધી તેના પરના લંબમાંના કોઈ બિંદુમાંથી દોરેલી સરખી લીટીઓ લંબની જોડે સરખા ખુણા કરે છે.”**

એક **अब** લીટી દોરો. તેની બહાર **क** બિંદુ લો. **क** બિંદુથી **अब** કેટલે અંતરે છે ? **क**માંથી **अब** સુધી ગમે તેટલી લીટીઓ દોરી શકાશે, અને કદાચ એમ ધારવામાં આવશે કે તે બધી લીટીઓ **क** અને **अब** વચ્ચેનું અંતર દર્શાવી શકશે. પરંતુ કોઈ પણ બે સ્થળ વચ્ચેનું અંતર પૂછ્યું હોય, તો જે અંતર ઓછામાં ઓછું હોય તે આપણે કહીએ છીએ; માટે **क**થી **अब** સુધીનું અંતર તે **क** અને **अब** વચ્ચેનું ઓછામાં ઓછું અંતર છે. આ અંતર કયું છે તે આગળ આવી ગએલા પ્રયોગ ઉપરથી આપણાથી કહી શકાશે કે? “ આ અંતર **क**માંથી **अब** પર દોરેલો લંબ છે.” **क**માંથી **अब** ઉપર લંબ દોરો. આ લંબ કરતાં નાની લીટી **क**માંથી **अब** ઉપર દોરી શકાશે કે ? “ ના ”. આ પરથી આપણે જાણી શકીએ છીએ, કે આપેલું બિંદુ અને આપેલી લીટી એ બે વચ્ચેનું અંતર તે બિંદુમાંથી તે લીટી પર દોરેલા લંબની લંબાઈ છે.

પ્રશ્ન.

(૧) **अब**=૧·૨″ લો. **ब** છેડા સાથે કાટખુણો કરનારી લીટી દોરો.

(૨) **अब**, **कड** લીટીઓ દોરો, અને **ब**માંથી **कड** પર લંબ દોરો.

(૩) ગમે તેવો એક ત્રિકોણ દોરો. તેના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર લંબ દોરો.

(૪) ગમે તેવો એક ખુણો કરો. તેને ઘડી વાળીને દુભાગો. દુભાગનારી લીટી(સળ) પર ગમે ત્યાં એક બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી ખુણાના ભુજો પર લંબ દોરો. તે માપો અને તેમને સરખાવો. તમને શું દેખાય છે? "તે સરખા છે."

(૫) ગમે તેવો એક ત્રિકોણ કાઢો. તેની બાજુઓ દુભાગો. દુભાગનારાં બિંદુઓમાંથી લંબો દોરો. તેમને એક બીજાને મળતાં સુધી લંબાવો. તેઓ એક બીજાને ક્યાં મળે છે એ વિષે તમને કંઈ વિશેષ બાબત જણાઈ આવે છે? (પુ૦). **"તે બધા એકજ બિંદુમાં મળે છે."**

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ.

બે સમાંતર લીટીઓ દોરો. તેમને છેદનારી એક લીટી દોરો. તેને સમાંતર બીજી લીટી દોરો. આ ચાર લીટીઓથી બનેલી આકૃતિની સામસામી બાજુઓ સમાંતર છે, માટે તેને **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ** કહે છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ જેવા દેખાતા કેટલાક પદાર્થનાં નામ કહો. અટકળથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. તેની બાજુઓ સમાંતર છે કે નહિ તે જુઓ.

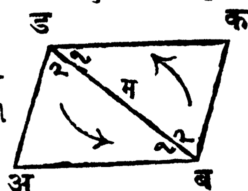
વ્યાખ્યા:—જે ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સમાંતર હોય છે તેને **સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ** કહે છે.

જુદા જુદા પ્રકારના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. તેમની સામસામી બાજુઓ અને સામસામા ખુણા માપો. તેમ, કર્ણો દોરો, અને કર્ણોએ એક બીજાના કરેલા ભાગ અને તેમને સરખાવો. (પુ૦). આ પરથી તમને સામાન્ય નિયમ સમજાય છે? **"સામસામી બાજુ**

અને ખુણા સરખા હોય છે." સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણથી થએલા બે ત્રિકોણરૂપ ભાગ એક બીજા પર મૂકી જુઓ. (પુ૦). શું જણાઈ આવે છે? "તેઓ એકરૂપ છે."

(નીચેનો પ્રયોગ પ્રત્યક્ષ કરવો.)

अबकड સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. **बड** કર્ણ છે. **बड**નું મધ્યબિંદુ **म** છે, એમ ધારો.



∠**अबड**=∠**बडक** } કારણ કે તે સમાંતર લીટીઓના
∠**अडब**=∠**कबड** } વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે.

હવે **अबकड** ચતુષ્કોણની નકલ **अबकड** ચતુષ્કોણ પર મૂકીને **म** બિંદુની આસપાસ અર્ધા વર્તુળ જેટલી ફેરવીને મૂકી હોય તો **मब,मड** બરાબર છે તેથી **ब,ड** પર પડશે. જ્યારે **ब,ड** પર પડે છે, ત્યારે ∠**अबड**, ∠**बडक**ની બરાબર હોવાથી **बअ, डक** પર પડશે. તેમજ **डम=मब**, માટે **ड, ब** પર પડશે; અને ∠**अडब**=∠**कबड** છે, માટે **डअ,बक** ઉપર પડશે.

હવે **बअ, डक** પર પડશે, અને **डअ, बक** પર પડશે, માટે **अ,क** પર બરાબર આવી રહેશે.

એજ પ્રમાણે બતાવી શકાશે કે **डक, बअ** ઉપર પડે છે; **कब, अड** પર પડે છે; અને અલબત **क,अ** પર પડે છે.

આ ઉપરથી આપણે જોઈએ છીએ કે **बअ, डक**ની બરાબર છે; **अड, बक**ની બરાબર છે; **अम, मक**ની બરાબર છે; સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર છે; અને કર્ણથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થાય છે.

ઉપલા બધા પ્રયોગો પરથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કયા ધર્મ જણાઈ આવે છે?

"**સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં—**

(૧) **સામસામા ખુણા સરખા હોય છે;**

(૨) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે;

(૩) દરેક કર્ણથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થાય છે; અને

(૪) બંને કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના જુદા જુદા પ્રકાર.

એક બીજી સાથે મધ્યભાગે કાટખુણો કરનારી બે સરખી લીટીઓ દોરો. તેમના છેડામાંથી પડેલી બે લીટીઓને સમાંતર લીટીઓ દોરીને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કરો. આ ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ અને ખુણા માપો, અને તેમને સરખાવો. શું જણાય છે? "બધી બાજુ સરખી છે, અને બધા ખુણા કાટખુણા છે." એવી આકૃતિને **ચોરસ** કહે છે.

કાગળના બે સરખા ચોરસ કાપી કાઢો. તે પૈકી એક ચોરસ બીજા પર જુદી જુદી રીતે મૂકીને ચોરસના ખુણા અને બાજુઓ સરખાવો. શું જણાય છે ?

એક બીજી સાથે કાટખુણો કરનારી બે નાની મોટી લીટી લઈને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ બને છે તેને **લંબચોરસ** કહે છે.

એક બીજી સાથે તિર્યક્ (સાંકડો કે પહોળો) ખુણો કરનારી બે સરખી લીટી લઈને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ થાય છે, તેને **સમબાજુ ચતુષ્કોણ** કહે છે.

એક બીજી સાથે તિર્યક્ (સાંકડો કે પહોળો) ખુણો કરનારી બે નાની મોટી લીટી લઈને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ બને છે, તેને **સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ** કહે છે. [સમપ્રતિભુજ=સમ એટલે સરખી (છે) પ્રતિ એટલે સામસામી, ભુજ એટલે બાજુઓ (જેની તે).]

ઉપર ચોરસ વિષે જે પ્રયોગ કર્યા છે, તે લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ, એ બધાના સંબંધમાં કરો; અને તેમની બાજુઓ અને ખુણાઓ વિષે કયો નિયમ નીકળે છે તે જુઓ.

"લંબચોરસની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે, અને સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે."

"સમબાજુ ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુ સરખી હોય છે, અને ફક્ત સામસામા ખુણા સરખા હોય છે."

"સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણની ફક્ત સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે."

નીચે આપેલી લંબાઈવાળી લીટીઓ લઈને તેમના પર ચોરસો દોરોઃ—

૧", ૧·૨", ૧·૪", ૯ મિ·મી; ૧·૨ સે·મી; ૧·૫ સે·મી; ૨·૨ સે·મી.

નીચે આપેલી લંબાઈ પહોળાઈના લંબચોરસ દોરોઃ—

૨", ૧"; ૧·૨", ૧"; ૧·૪", ·૮"; ૩", ૨"; ૨·૨," ૧·૨"; ૩·૫", ૧·૪".

નીચે આપ્યા પ્રમાણે એક બાજુ અને ખુણો લઈને સમબાજુ ચતુષ્કોણ દોરોઃ—

अब=૧", ∠**डअब**=૪૫°; **अब**=૧·૩", ∠**डअब**=૭૫°; **अब**=૧·૫", ∠**डअब**=૧૨૦°.

નીચે આપેલી બાજુઓ અને ખુણા લઈને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ દોરોઃ—

अब	**डअ**	∠**डअब**
૨"	૧·૫"	૩૦°
૧·૨"	૧"	૧૨૦°

૨″	૨.૨″	૧૦૦°
૧.૭″	૧.૮″	૪૮°

ચોરસ, લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ એમના બંને કર્ણ દોરો; અને કર્ણોના ભાગો અને તેમની વચ્ચેના ખુણા સરખાવો. (પુ૦). શું જણાઈ આવે છે? **“ચોરસના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે; લંબચોરસના કર્ણો સરખા હોય છે, અને તે તિર્યક્ (સાંકડા કે પહોળા) ખુણે એક બીજાને દુભાગે છે (એટલે તે એક બીજા પર લંબ હોતા નથી). સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે. સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને તિર્યક્ ખુણે દુભાગે છે.”**

વ્યાખ્યા—

જે ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે તેને **ચોરસ** કહે છે.

જે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે અને પાસ-પાસેની બાજુઓ નાની મોટી હોય છે, તેને **લંબચોરસ** કહે છે.

જે ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા ખુણા તિર્યક્ (બે સાંકડા અને બે પહોળા) હોય છે તેને **સમબાજુ ચતુષ્કોણ** કહે છે.

જે ચતુષ્કોણની ફક્ત સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે અને બધા ખુણા તિર્યક્ (બે સાંકડા ને બે પહોળા) હોય છે તેને **સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ** કહે છે.

જે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે તેને **કાટખુણ ચોખુણ** કહે છે.

જેની કોઈ પણ બાજુઓ સમાંતર નથી એવો એક ચતુષ્કોણ દોરો. તેની સામસામી બાજુઓ અને સામસામા ખુણ

માપો. (પુ૦). એવા ચતુષ્કોણની સામસામી કે પાસપાસેની બાજુઓ અને ખુણા હંમેશજ સરખા હોય છે કે? એવા ચતુષ્કોણને **વિષમબાજુ ચોખુણ** કહે છે; કારણ કે તેની બાજુઓ વિષમ એટલે નાની મોટી હોય છે.

ચોખુણની ફક્ત બેજ બાજુ સમાંતર હોય તો તેને **સમલંબ ચોખુણ** કહે છે.

ઉપર આપેલી વ્યાખ્યાઓની શરૂઆતમાં કહેલા ચોખુણ કે ચતુષ્કોણના નિયમિત પ્રકાર સિવાય જેમના ધર્મ નિયમિત હોય એવો ચોખુણનો હવે કોઈ બીજો પ્રકાર પડી શકે એમ છે કે?

એક વિષમબાજુ ચોખુણ અને એક સમલંબ ચોખુણ હાથે દોરો.

ચોરસ અને લંબચોરસના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે, માટે આ આકૃતિઓ કાટખુણ ચોખુણ કહેવાય છે.

બધા કાટખુણ ચોખુણ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે? **"તેમના બધા ખુણા સરખા હોય છે, અને તેમના બંને કર્ણ સરખા હોય છે."**

ચોરસ અને સમબાજુ ચોખુણ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે? **"તેમની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે અને તેમના કર્ણો એક બીજા પર લંબ હોય છે."** તેઓ કઈ બાબતમાં જુદા પડે છે? "........"

બધા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે? **"તેમની સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે, અને તેમના કર્ણો એક બીજાને દુભાગે છે."**

લંબચોરસ અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ કઈ બાબતમાં એક બીજાને મળતા આવે છે? કઈ બાબતમાં તેઓ જુદા પડે છે?

ચતુષ્કોણોના જુદા જુદા પ્રકાર નીચે અનુક્રમે આપ્યા છે, અને તેમની સામે ખાનાં પાડેલાં છે. તે ખાનાં કયા ધર્મ દર્શાવે છે તે ખાનાંની ઉપલી બાજુએ લખેલું છે. તેા મથાળે આપેલા ધર્મ જે જે ચતુષ્કોણમાં હોય તેમની સામે તે ધર્મ દર્શાવનારાં ખાનાંમાં 'હા' એમ લખેા.

	સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા છે?	કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે?	બધા ખુણા કાટખુણા છે?	કર્ણો સરખા છે?	કર્ણો એક બીજા પર લંબ છે?	પાસપાસેની બાજુ-ઓ સરખી છે?
સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ						
સમબાજુ ચતુષ્કોણ						
લંબચોરસ						
ચોરસ						
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ						

એવા ચોખુણ દોરો કે જેમની

(૧) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, અથવા

(૨) સામસામા ખુણા સરખા હોય, અથવા

(૩) સામસામી બે બાજુઓ સરખી અને સમાંતર હોય, અથવા

(૪) જેમના કર્ણ એક બીજાને દુભાગતા હોય; અને તેમની સામસામી બાજુઓ સમાંતર છે કે કેમ તે જુઓ. (પુ૦).

આ ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

"ચોખુણમાં જો—

(૧) સામસામી બાજુઓની બે જોડમાંથી દરેક જોડમાંની બાજુઓ સરખી હોય; અથવા

(૨) સામસામા ખુણા સરખા હોય; અથવા

(૩) સામસામી બાજુઓની બે જોડમાંથી એક જોડમાંની બે બાજુઓ સરખી અને સમાંતર હોય; અથવા

(૪) કર્ણો એક બીજાને દુભાગતા હોય, તો તે ચોખુણ સમાંતરબાજુ હોય છે."

પ્રશ્ન.

નીચેનાં માપ ઉપરથી કહેલી આકૃતિઓ બનાવો:—

(૧) જેની બાજુઓ ૪" અને ૫" હોય એવો કાટખુણ ચોખુણ.

,, ,, ૩" અને ૨½" ,, ,, ,, ,,

,, ,, ૩·૨" અને ૫" ,, ,, ,, ,,

,, ,, ૧·૫" અને ૨" ,, ,, ,, ,,

(૨) જેની બાજુઓ ૩" અને ૪" હોય અને જેની બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો ૪૦° હોય એવો સમાંતરબાજુ ચોખુણ.

જેની બાજુઓ ૧" અને ૫" ને વચ્ચેનો ખુણો ૬૦° હોય એવો.

,,	૨" અને ૩"	,,	૮૦°	,,
,,	૫" અને ૪"	,,	૧૨૦°	,,
,,	૨" અને ૪"	,,	૧૫૦°	,,

(૩) નીચેનાં માપ ઉપરથી ચોખુણ કરોઃ—

अब=૬·૩ સે·મી·, ब=૮૨°, बक=૮·૨ સે·મી·, क=૯૦°, कड=૭·૭ સે·મી·

अब=૩·૪", बक=૨·૨", अड=૨·૯", अ=૬૮°, ब=૮૬°.

ब=૧૧૬°, बक=૧·૪", क=૯૯°, कड=૧·૯", ड=૯૨°.

अ=૬૭°, ब=૧૧૩°, क=૪૬°, अब=૫·૩", अड=૮·૬".

ब=૧૨૨°, क=૧૩૦°, ड=૪૫°, बक=कड=૧·૬".

अड=૩", ड=૧૧૮°, डअक=૨૭°, बअक=૩૫°, अब=૨·૪".

अक=૫·૬", बअक=૫૮°, डअक=૫૯°, बकअ=૫૮°, डकअ=૬૯°.

अब=૧·૯", बड=૧·૭", कड=૨", अबड=૧૧૮°, बडक=૨૩°.

अब=कड=૫·૮ સે·મી; अड=૪·૭ સે·મી; अ=૭૨°, बडक=૪૬°.



પ્રકરણ ૨.

ભૂમિતિમાંની કેટલીક મૂળ કલ્પનાઓ અને વ્યાખ્યાઓ.

[**સૂચના:**—આની પહેલાંનો સર્વ ભાગ જેમને ચાલી ગયો હોય એવા વિદ્યાર્થીઓ માટેજ આ ભાગ છે. આ પહેલે ફેરે ન લેતાં પહેલા ખંડના પુનરાવર્તન વખતેજ લેવો.]

ભૂમિતિ એટલે શું ?

એક ખેતરથી બીજું ખેતર કેટલું મોટું છે, તે તેમની લંબાઈ અને પહોળાઈ જોઈને આપણે કહી શકીએ છીએ. એજ રીતે એક લાકડાના ઘન કરતાં બીજો ઘન કેટલો મોટો છે, એ તેમની લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈ જોઈને કહી શકીએ છીએ. પરંતુ આ કામ માટે લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈ પરથી પદાર્થોનું કદ નક્કી કરવાના જે નિયમો બાંધવામાં આવ્યા છે, તે જાણવાની જરૂર છે. પદાર્થોની બાજુઓના અને ખુણાઓના જે ધર્મો ઉપરથી આ નિયમો નક્કી થયા છે, તે ધર્મોનું વિવેચન જે શાસ્ત્રમાં કર્યું છે, તેને **ભૂમિતિ** કહે છે.

જમીન કેમ માપવી એનો વિચાર કરતાં, પદાર્થોની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ખુણા પરથી તેમનું પરિમાણ નક્કી કરવાના કેટલાક નિયમો લોકોના જાણવામાં આવ્યા; તેથી આ નિયમોના શાસ્ત્રનું ભૂમિતિ એ નામ પાડ્યું. [ભૂ=પૃથ્વી, જમીન; મિત=માપવું (નામ).]

પદાર્થ.

[નીચેના વિવેચનમાં ‘પદાર્થ’ શબ્દનો અર્થ જેને રૂપ કે આકાર હોય એવી કોઈ પણ વસ્તુ, એમ સમજવો.]

પદાર્થો જગા રોકે છે, તેથી તેઓ જેટલી અને જે પ્રકારની જગા રોકે છે, તેટલો અને તેવો તેમનો આકાર હોય છે. પેટી ચોખંડી જગા રોકે છે માટે તેનો આકાર ચોખંડો હોય છે. જ્યારે કાદવનો ગોળો ગોળ જગા રોકે છે, ત્યારે તેનો આકાર ગોળ થાય છે. જો તેજ કાદવનો ગોળો કોઈ ચોખંડી પેટીને ભરી કાઢે, તો તે ચોખંડી પેટીમાંની જગા રોકશે, અને તેથી તેનો આકાર ચોખંડો થશે. પાણી ગાગરમાંની જગા રોકે છે, ત્યારે તે ગાગરનો આકાર ધારણ કરે છે; પણ તે એક સીસીમાં ભર્યું હોય, તો તે સીસીનો આકાર ધારણ કરશે.

બધા પદાર્થો વિષે આપણને નીચેનો સામાન્ય નિયમ જણાઈ આવે છેઃ—બધા પદાર્થોને કોઈ પણ આકાર હોય છે, અને તેઓ કોઈ પણ જગા રોકે છે.

કેટલાક પદાર્થ (પાટીઆના કડકા વગેરે) એવા લો, કે જેમની પહોળાઈ અને જાડાઈ સરખી હોય, પણ લંબાઈ ઓછીવત્તી હોય; કેટલાક એવા લો, કે જેમની લંબાઈ અને જાડાઈ સરખી હોય, પણ પહોળાઈ ઓછીવત્તી હોય; અને કેટલાક એવા લો, કે જેમની લંબાઈ અને પહોળાઈ સરખી હોય, પણ જાડાઈ ઓછીવત્તી હોય; અને છોકરાઓ પાસે તેમની સરખામણી કરાવીને, અથવા અમુક પદાર્થ કેટલો મોટો છે, તે તેની બાજુઓની મદદથી તેમની પાસે કહેવડાવીને નીચેનો સામાન્ય નિયમ કઢાવોઃ—

સર્વ પદાર્થોને લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈ હોય છે. લંબાઈ, પહોળાઈ અને જાડાઈ, એ પરિમેયો સર્વ પદાર્થોને હોય છે; માટે સર્વ પદાર્થોને ત્રિપરિમેયાત્મક (એટલે ત્રણ પરિમેયોવાળા) કહે છે.

કેટલાક પદાર્થોને લંબાઈ, પહોળાઇ, અને જાડાઈ—આ

પરિમેયો પૈકી એક અથવા વધારે પરિમેયો સૂક્ષ્મ હોય છે, પરંતુ તે બીલકુલ હોતાં નથી એમ કદી પણ બનતું નથી.

લંબાઈ, પહોળાઈ, જાડાઈ.

કોઈ પણ પદાર્થ જે બાજુએ વધતો જતો દેખાય છે, તે બાજુને તે પદાર્થની **લંબાઈ;** લંબાઈની સપાટીમાં હોઈને લંબાઈની સાથે કાટખુણો કરનારી આડી બાજુને તેની **પહોળાઈ;** અને આ બંનેની જોડે કાટખુણો કરનારી (અથવા બંને પર ઉભી આવેલી) બાજુને તેની **જાડાઈ** કહેવાનો સામાન્ય રિવાજ છે. પરંતુ કોઈ કોઈ વખતે પદાર્થની સૌથી મોટી બાજુને લંબાઈ, તેનાથી નાની બાજુને પહોળાઈ અને સૌથી નાની બાજુને જાડાઈ, એમ પણ કહે છે. તેમ છતાં એટલું ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ, કે લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જાડાઈ એ કેવળ સાંકેતિક (અને સાપેક્ષ) શબ્દો છે; અને તે શબ્દો કોઈ પણ બાજુને લગાડ્યા હોય, તોપણ તે પરથી ગણિત કરવામાં ભૂલ થવાનો સંભવ નથી.

પૃષ્ઠ.

આ દડાને જુદી જુદી બાજુએથી જુઓ. તેનો આકાર સર્વ બાજુએથી સરખોજ દેખાય છે કે ? આ આંકણી (ગોળ આંકણી) તરફ જુદી જુદી બાજુએથી જુઓ. તેનો આકાર સર્વ બાજુએથી સરખોજ દેખાય છે કે ? પૈસો સર્વ બાજુ-એથી જુઓ. તેનો આકાર બધી તરફથી સરખોજ દેખાય છે કે ? આ ઈંટ તરફ તમે ગમે તે બાજુએથી જુઓ, તોપણ તે સરખીજ દેખાય છે કે ? તે લંબાઈની બાજુએથી જોઈ હોય તો કેવી દેખાય છે ? પહોળાઈની બાજુએથી જોઈ હોય તો કેવી દેખાય છે ? ઉપલી બાજુએથી કેવી દેખાય છે ? દડો બધી બાજુથી સરખો દેખાય છે, પણ

આંકણી, પૈસા, ઈંટ વગેરે પદાર્થો બધી તરફથી સરખા દેખાતા નથી. એનું કારણ શું? "તેમની બાજુઓ જુદા પ્રકારની છે, એટલે તેમનાં પૃષ્ઠ જુદા પ્રકારનાં છે."

આ ઉપરથી પદાર્થોના સંબંધમાં વળી કયો ધર્મ સમજાય છે? "તેમને પૃષ્ઠો* હોય છે."

દડાને કેટલાં પૃષ્ઠ હોય છે? શંકુને કેટલાં? ગોળાર્ધને કેટલાં? પૈસાને કેટલાં? પેટીને કેટલાં? "દડાને એક પૃષ્ઠ હોય છે, શંકુને અને ગોળાર્ધને બે પૃષ્ઠ હોય છે, પૈસાને ત્રણ પૃષ્ઠ હોય છે, પેટીને છ પૃષ્ઠ હોય છે." વાંકાચુંકા પત્થરને કેટલાં પૃષ્ઠ હોય છે? "તેને અનેક પૃષ્ઠ હોય છે."

દડાનું પૃષ્ઠ અને ઘનનું પૃષ્ઠ તપાસો. તે બે વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે? "દડાનું પૃષ્ઠ વક્ર છે, અને ઘનનું પૃષ્ઠ સપાટ છે."

પૃષ્ઠ બે પ્રકારનાં છે–**સપાટ** અને **વક્ર.**

જેનાં બધાં પૃષ્ઠો સપાટ હોય, એવા પદાર્થને ઓછામાં ઓછાં કેટલાં સપાટ પૃષ્ઠો હોય છે? "ચાર. દાખલા તરીકે, ત્રિકોણાકાર મિનારો કે શંકુ."

કોઈ પણ પદાર્થનાં બે પૃષ્ઠો જ્યાં એકમેકને મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે? "કોર." આ કોર ભૂમિતિમાંની કઈ આકૃતિ જેવી દેખાય છે? "લીટી જેવી." બેથી વધારે પૃષ્ઠો જ્યાં એકમેકને મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે? "અણી." કોરો મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે? "અણી." અણી, ભૂમિતિમાંની કઈ આકૃતિ જેવી દેખાય છે? "બિંદુ જેવી."

---

* બાજુ કરતાં પૃષ્ઠ શબ્દ વધારે સારો છે. બાજુ શબ્દનો કોર એવો પણ અર્થ થાય છે; પરંતુ પૃષ્ઠ શબ્દનો એકજ અર્થ થાય છે; તેથી પૃષ્ઠ શબ્દનો ઉપયોગ કર્યો હોય તો અર્થની બાબતમાં ગુંચવાડો થશે નહિ.

બે પૃષ્ઠો ફક્ત એકજ લીટીમાં મળી શકે છે; તેથી '(પાસપાસેનાં) બે પૃષ્ઠોને એક બીજાથી ઓળખાવનારી આકૃતિને લીટી કહેવી.' એવી, લીટીની વ્યાખ્યા કોઈ કોઈ વખતે આપવામાં આવે છે.

ત્રિકોણાકાર શંકુને પૃષ્ઠ કેટલાં ? કોરો કેટલી ? ખુણા કેટલા ? અણી કેટલી ? બે પૃષ્ઠ મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ? "કોર." કોરો મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ? "અણી." ત્રિકોણાકાર શંકુનાં એકજ વખતે વધારેમાં વધારે કેટલાં પૃષ્ઠ દેખાય છે ? (ધન, શંકુ, ઈંટ......વગેરેના સંબંધમાં એવાજ પ્રશ્નો પૂછવા.)

ઉપલા વિવેચન પરથી એમ સ્પષ્ટ માલમ પડશે કે પદાર્થોના છેડા પૃષ્ઠો હોય છે, પૃષ્ઠના છેડા (હદ) લીટીઓ હોય છે, અને લીટીના છેડા બિંદુઓ હોય છે.

પૃષ્ઠને લંબાઈ હોય છે કે ? "હા." પહોળાઈ હોય છે કે ? "હા." જાડાઈ હોય છે કે ? "ના." (જાડાઈ હોય છે એવો ઉત્તર કોઈ આપે તો નીચેનો પ્રયોગ કરીને યોગ્ય જવાબ કઢાવવો.)

(૧) આ તપેલામાંના પાણીનો પૃષ્ઠભાગ જુઓ. આ પૃષ્ઠ તપેલાના અંદરના ભાગને અડકેલું છે કે ? "હા." આ પૃષ્ઠ જ્યાં (તપેલાની બાજુને) અડકે છે તેની નીચે બધું પાણીજ છે અને ઉપર બધી હવાજ છે; માટે આ પૃષ્ઠ પાણી અને હવાની વચ્ચે છે. જ્યાં પાણી પુરૂં થાય છે ત્યાં હવા શરૂ થાય છે; તો આ પૃષ્ઠને કંઈ જાડાઈ હોવાનો સંભવ છે ?

(૨) એક સીસીમાં તેલ અને પાણી ભરવાં; અને જ્યાં પાણી પુરૂં થાય છે ત્યાં તેલ શરૂ થાય છે, એ વાત બતાવીને, પૃષ્ઠને જાડાઈ નથી એ વાત સ્પષ્ટ કરવી.

એક લાકડાનું પાટીઉં ઘસાતાં ઘસાતાં એટલું ઘસાયું, કે

તેને જાડાઈ નામની પણ બીલકુલ રહી નહિ; એવી આપણે કલ્પના કરીએ, તો તેનો લંબાઈ પહોળાઈવાળો જે ભાગ રહ્યો તે પૃષ્ઠ છે; અર્થાત્ એને જાડાઈ નથી.

જમીનનું ક્ષેત્રફળ કાઢતી વખતે તેની ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈનોજ વિચાર કરવો પડે છે; જાડાઈનો બીલકુલ વિચાર કરવો પડતો નથી. આ ઠેકાણે જમીનના સંબંધમાં જે વાત ધ્યાનમાં લેવી પડે છે, તેનેજ પૃષ્ઠ કહેવું.

છાયાને લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે, પણ જાડાઈ હોતી નથી; માટે છાયા એ પૃષ્ઠનો એક ઘણોજ સારો દાખલો ગણી શકાય.

વસ્તુ અને આકાશ એ બે વચ્ચેની હદ એ તે વસ્તુનું પૃષ્ઠ છે.

પૃષ્ઠને પરિમેય કેટલાં? "બે." પૃષ્ઠના છેડા કઈ આકૃતિ જેવા દેખાય છે? "લીટી જેવા."

વર્તુળ, પરિઘ, વ્યાસ, કાંસ, અને જ્યા એમને પરિમેયો કેટલાં? પાતળા કાગળનો કડકો, છાયા, અને કાગળને લગાડેલા રંગનો થર એ પૃષ્ઠો કહેવાય કે?

પૃષ્ઠની વ્યાખ્યા:—પૃષ્ઠને ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે, પણ જાડાઈ બીલકુલ હોતી નથી.

સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ.

સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ વચ્ચે શો તફાવત છે? બે સપાટ પૃષ્ઠ (દાખલા તરીકે, ઘનની કે ઇંટની બાજુ) એકમેકને લગાડો. પછી બે વક્ર પૃષ્ઠો (દડાની કે નળાકારની બાજુ) એકમેકને લગાડો. બે સપાટ પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂકીને તેમને એક બીજા પર (ઘંટીના પડની માફક) જુદી જુદી દિશામાં ફેરવો. બે વક્ર પૃષ્ઠોને એક બીજા પર મૂકીને તેજ પ્રમાણે ફેરવો. આ બે બાબતોમાં શો ફરક જણાય છે? "સપાટ પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂક્યાં હોય, તો તે એક

બીજા સાથે બરાબર મળી જાય છે, તેમની વચ્ચે અંતર રહેતું નથી; અને વક્ર પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂક્યાં હોય તો તેમની વચ્ચે કેટલુંક અંતર રહે છે."

સપાટ પૃષ્ઠ પર ગમે ત્યાં બે બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી લીટી દોરા વડે દર્શાવો. (બિંદુઓની જગાએ ટાંકણીઓ ખોસવી, અને તેમાંની એક ટાંકણીથી બીજી ટાંકણી સુધી દોરો તાણી બાંધીને સીધી લીટી દર્શાવવી.) આ લીટી પૃષ્ઠમાં રહે છે કે પૃષ્ઠની બહાર રહે છે? વાંકા અને ઉંડા પૃષ્ઠ ઉપર બે બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી લીટી દોરાથી દર્શાવો. (પહેલાંની માફક બિંદુની જગાએ ટાંકણીઓ ખોસવી, અને એક ટાંકણીથી બીજી ટાંકણી સુધી દોરો તાણી બાંધીને સીધી લીટી દર્શાવવી.) તે (આખી) લીટી પૃષ્ઠમાંજ રહે છે, કે પૃષ્ઠની બહાર રહે છે? વક્ર પૃષ્ઠમાં બે બિંદુઓ ગમે ત્યાં લીધાં હોય, તો તેમને સાંધનારી સીધી લીટી હંમેશાં તે પૃષ્ઠમાં રહે છે કે?

આ પરથી સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠની વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે? દડાના કે નળાકારના પૃષ્ઠ પર ગમે ત્યાં બિંદુ લીધાં હોય, તો તે બિંદુઓને સાંધનારી સર્વ લીટીઓ સીધી હશે કે? "ના."

સપાટી.

કોઈ પૃષ્ઠ સીધું કે સપાટ હોય તો તે એક સપાટીમાં છે એમ કહેવાય છે.

કોઈ પૃષ્ઠ બધી દિશાઓમાં એકજ સીધી લીટીમાં વધાર્યું હોય, તો તે જે જગા રોકે છે, તે તે પૃષ્ઠની **સપાટી** છે.

ઓછીવત્તી લંબાઈની ત્રણ લાકડીઓ ભોંયમાં ખોસવી. તેમના ઉપલા છેડા બિંદુઓ છે એમ ધારવાને છોકરાઓને કહેવું. તે લાકડીઓની (ટોચ) ઉપર મોટું પાટીઉં આડું

મૂકવું, એટલે લાકડીઓના છેડાથી દર્શાવાતી બિંદુઓની સપાટી પાટીઆથી દર્શાવાશે. આ પ્રયેાગ જુદી જુદી રીતે ત્રણ ચાર વખત કરવેા.

સપાટીનું લક્ષણ એવું છે, કે તેમાં ગમે તે બે બિંદુ લઈને તેમની વચ્ચે જો સીધી લીટી દોરી હોય, તેા તે આખી લીટી તે સપાટીમાં રહે છે. (તે સીધી લીટીનેા કોઈ પણ ભાગ તે સપાટીની બહાર થઈને જાય તેા તે સપાટીજ નથી.)

સપાટી નક્કી કરવા માટે ઓછામાં ઓછાં કેટલાં બિંદુ જોઈએ ? "ત્રણ."

ચેાપડીની છ બાજુમાંથી કઈ બાજુઓ એકજ સપાટીમાં હોય છે? દાબડીની કઈ બાજુઓ એકજ સપાટીમાં હોય છે?

ત્રણથી વધારે નાની મેાટી લાકડીઓ ભેાંયમાં ખેાસવી, અને તેમના પર પાટીઉં આડું મૂકવું; એટલે એમ જણાઈ આવશે કે તે પાટીઉં જુદી જુદી સ્થિતિમાં કેટલીક સળીઓના છેડાને અડકે છે અને કેટલીકના છેડાને અડકતું નથી. આ ઉપરથી તે બધા છેડા એક સપાટીમાં નથી એ નક્કી થશે. ગમે તે ત્રણ લાકડીના છેડા પર પાટીઉં મૂકીને, તે છેડાથી દર્શાવેલાં બિંદુઓની સપાટીમાં બીજા છેડા આવે એટલા માટે તેમને કેટલા ઉપર નીચે કરવા જોઈએ, એ છેાકરાંને પૂછવું; એટલે તેમને સપાટીનેા બરાબર ખ્યાલ આવશે.

મેજ પરના પાટીઆની સપાટીમાં આસપાસની ભીંતના અને બીજી ચીજોના જે ભાગ છે તે દેખાડેા.

ધારેા કે મેજના બે પાયા નીચે પત્થર મૂકવાથી મેજ ત્રાંસું થયું છે. હવે મેજ પરના પાટીઆની સપાટીમાં આસપાસની ભીંતના અને બીજા પદાર્થના જે ભાગ આવે છે તે બતાવેા.

એકાદ પાટીઉં જુદી જુદી રીતે પકડીને તેની સપાટીમાં આવતા ભીંતના ભાગ બતાવવાને કહેવું. ભીંત ઉભી સપાટી-માં છે કે નહિ, એ આપણે શી રીતે જોઈ શકીશું?

એક કાચનું પ્યાલું પાણીથી ભરો. પાણીના પૃષ્ઠની સપાટી કઈ? આ કાર્ડ બીજી એક સપાટી છે એમ ધારો. કાર્ડ પાણીમાં ત્રાંસું બોળો. આપણે જોઈએ છીએ કે કાર્ડની સપાટી પાણીના પૃષ્ઠને છેદે છે. આ બે સપાટી જ્યાં એકમેકને છેદે છે ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે? "લીટી."

એક વક્ર અને એક સીધું, અથવા બંને વક્ર પૃષ્ઠો એકમેકને જ્યાં છેદે છે, ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે? "લીટી." તે કદી પણ સીધી લીટી હોય છે કે? "ના. તે વાંકી લીટી હોય છે."

લીટી.*

કાળા પાટીઆ પર પટી મૂકવી. પટીની બાજુએ ચાકની અણી પાટીઆ પર ધીમેથી દાબવી; એટલે પાટીઆ પર બિંદુ પડશે. પછી ચાક વચ્ચે વચ્ચે ઉપાડીને ખસેડતાં ખસેડતાં પાટીઆ પર ટપકાંની લીટી કરવી. આ ટપકાં વચ્ચેની ખાલી જગામાં બીજાં ટપકાં મૂકવાં, એટલે પહેલાંનાં ટપકાં વચ્ચેનું અંતર ઓછું થશે. એવી રીતે વારંવાર ટપકાં ઉમેર્યાં હોય, તો તે બધાં એકમેકમાં મળી જઈને લીટી તૈયાર થશે. એ પ્રમાણે પ્રયોગ કરીને ટપકાં ટપકાં મળીને લીટી તૈયાર થાય છે આ વાત§ કઢાવવી.

---

* આ ભાગમાં સીધી લીટી અને વક્ર લીટી વચ્ચેના તફાવતના સંબંધમાં વિચાર કર્યો છે; તેથી પહેલાંના સંકેત પ્રમાણે આ ભાગમાં લીટી એ શબ્દનો અર્થ સીધી લીટી એમ ન લેતાં સાધારણ અર્થ લેવો.

§ એ વાત ફક્ત સ્થૂળ રીતે જોતાં ખરી છે, એ યાદ રાખવું. શાસ્ત્રની દૃષ્ટિથી એમ કહેવું બરાબર નથી.

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લેવાં, અને તેમની વચ્ચે એક સીધી લીટી, અને કેટલીક વાંકી લીટીઓ દોરવી. પાણીમાં દોરો પલાળીને, દોરો લીટીઓની ઉપર પાથરીને, સર્વ લીટીઓની લંબાઈ માપવી. કઈ લીટી સૈાથી ટુંકી છે? આ લીટી સીધી છે કે વાંકી? "સીધી." આના કરતાં ટુંકી લીટી આ બે બિંદુઓની વચ્ચે દોરો. દોરી શકાય છે? "ના." આ પરથી સીધી લીટીનો કયો ધર્મ જાણવામાં આવે છે? મુકરર અંતર પરનાં બે બિંદુઓની વચ્ચે જો કેટલીક લીટીઓ દોરી હોય, તો તેમની લંબાઈ પરથી સીધી લીટી કઈ છે તે જાણી શકાશે?

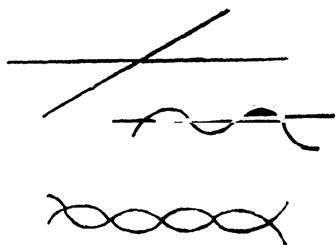
કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લો. તે પર (બે) ચુંકો ઠોકો. આ ચુંકો વચ્ચે એક દોરો તાણીને બાંધો. આ દોરાથી લાંબા દોરા લઈને તેમના છેડા આ ચુંકો વચ્ચે બાંધો. પહેલા દોરાથી અને બીજા દોરાથી જે લીટીઓ બને છે, તેમાંની કઈ લીટી સીધી લીટી જેવી દેખાય છે? આ પરથી બે બિંદુઓ વચ્ચે જો એક સીધી લીટી અને બીજી કેટલીક વાંકી લીટીઓ દોરી હોય, તો તે પૈકી સૈાથી ટુંકી લીટી કઈ હોય છે, એ વિષે શું સમજાય છે?

બે બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી એક સીધી લીટી કાઢો. તેજ બિંદુઓને સાંધનારી બીજી એક સીધી લીટી દોરો. આ લીટી પહેલી લીટીથી જુદી છે કે? "ના." આ બે બિંદુઓ વચ્ચે તમે બીજી કોઈ સીધી લીટી દોરી શકશો? "ના." આ ઉપરથી સીધી લીટીનો બીજો કયો ધર્મ જણાઈ આવે છે?

કાળા પાટીઆ પર બે બિંદુ લો. તેમના પર ચુંકો મારો. તેમની વચ્ચે એક દોરો ખેંચીને બાંધો. બીજા બે ત્રણ દોરા તેવીજ રીતે તાણીને બાંધો. તે દોરા એકજ સ્થાનમાં પડે છે, કે જુદાં જુદાં સ્થાનમાં પડે છે? આ પરથી બે બિંદુ-

એાની વચ્ચે જુદી જુદી સીધી લીટીએા કેટલી કાઢી શકાશે, એ વિષે શું જણાય છે? **"એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધી એકજ સીધી લીટી કાઢી શકાય છે."**

એક સીધી લીટી દોરેા. તેને છેદનારી બીજી એક સીધી લીટી દોરેા. એક વાંકીચુંકી લીટી લેા. તેને વધારેમાં વધારે બિંદુએામાં છેદનારી બીજી સીધી



અથવા વાંકી લીટી (આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે) દોરેા. બે સીધી લીટીએા એક બીજીને કેટલાં બિંદુએામાં છેદે છે ? "એક." વાંકી લીટીએા એક બીજીને કેટલાં બિંદુમાં છેદે છે ? "એકથી વધારે બિંદુએામાં."

એકથી વધારે બિંદુએામાં એક બીજીને છેદનારી બે સીધી લીટીએા દોરી શકાય કે ? "ના." આ પરથી સીધી લીટીનેા કયેા ધર્મ સમજાય છે ? **"બે સીધી લીટીએા એક બીજીને એકથી વધારે બિંદુએામાં છેદતી નથી."**

બે સીધી સળી લેા, અને તેમની મદદથી કોઈ જગાને ઘેરી લેવાનેા પ્રયત્ન કરેા. જગા ઘેરી લઈ શકાય છે કે? "ના."

બે સીધી લીટી દોરેા, અને તેમનાથી કોઈ જગા ઘેરી લેવાનેા પ્રયત્ન કરેા. તેમ કરી શકાય છે કે ? "ના." બે વાંકી લીટીએા લઈને તેમના વડે કોઈ જગા ઘેરી લેવાનેા પ્રયત્ન કરેા. ઘેરી શકાય છે કે ? "હા." આ પરથી સીધી લીટી અને વાંકી લીટી વચ્ચે શેા તફાવત જણાય છે ? **"બે સીધી લીટી જગા ઘેરી શકતી નથી."**

એક આંખ મીચેા, અને ઉઘાડી આંખ આગળ એક સીધી

સળી અથવા એકાદ પાટીઆનો સીધો છેડો એવી રીતે ધરો, કે તેના બંને છેડા અને આંખ એકજ સીધી લીટીમાં આવે. પછી એજ રીતે વાંકી સળી, લીટી, કે પાટીઆની વાંકી ધાર જુઓ. શો ફરક જણાઈ આવે છે ?

એક સીધી અને ત્રણ ચાર વાંકી લીટી લો. છેક પાતળા કાગળના અથવા ટ્રેસિંગ પેપરના જુદા જુદા કડકા પર તે લીટીઓની છાપ પાડો (નકલ પડે એમ કરો). એમાંથી દરેક કડકાને એવી રીતે વાળો કે તે પરની લીટીના ચાર ભાગ થાય. પછી દરેક લીટીના ગમે તે ભાગ પર, તેજ લીટીની છાપના ચાર ભાગમાંથી દરેક ભાગ મૂકીને તે નીચેની લીટી પર બરાબર આવી રહે છે કે કેમ તે જુઓ. કાગળના કકડા ઉથલાવીને તેજ પ્રયોગ કરો. સીધી લીટી અને વાંકી લીટી વચ્ચે આ પ્રયોગ પરથી શો ફરક જણાય છે? "સીધી લીટીનો કોઈ પણ ભાગ તેના બીજા કોઈ પણ ભાગ પર મૂક્યો હોય, તો તે તે પર બરાબર આવી રહે છે; પણ વાંકી લીટીઓનું એમ થતું નથી."

વ્યાખ્યા:—કોઈ પણ લીટીનો ગમે તે ભાગ (ઉલટાવ્યો હોય તોપણ) ઉંચકીને તેજ લીટીના બીજા કોઈ પણ ભાગ પર (બંને ભાગો એકજ દિશામાં રહે એવી રીતે) મૂક્યો હોય, ને તે તે પર બરાબર બેસે, તો તેને **સીધી લીટી** કહે છે.

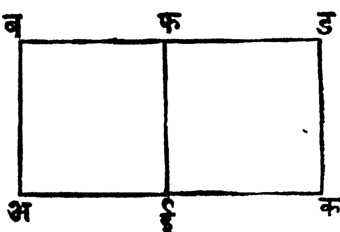
કોઈ સીધી લીટીમાંનું એક બિંદુ આપ્યું હોય, તો તે બિંદુ પરથી તે લીટી કઈ દિશામાં જાય છે તે કહી શકાય કે? "ના." ત્યારે કોઈ સીધી લીટી કઈ દિશામાં જાય છે, તે નક્કી કરવા માટે તે લીટીમાંનાં ઓછામાં ઓછાં કેટલાં બિંદુ જાણવાની જરૂર છે? "બે."

આપેલાં બે બિંદુ વચ્ચે સીધી લીટી શી રીતે દોરશો ?

આપેલી લીટીઓમાંથી સીધી કઈ અને વાંકી કઈ, એ તેમની વચ્ચે દોરો તાણી બાંધીને શી રીતે કહેશો?

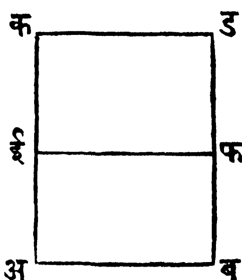
કોઈ ખેતરમાં એક ઝાડથી બીજા ઝાડ સુધી દોરીની મદદથી સીધી લીટી કેવી રીતે કાઢશો?

अबडक એક વીસ ઇંચ લાંબો અને દસ ઇંચ પહોળો કાગળનો કડકો છે. એને બરાબર વચ્ચેથી વાળ્યો હોય, તો તેના જે બે ભાગ થશે તે આકૃતિથી દર્શાવવા છે. તે દર્શાવવા માટે પાસે



દોરેલી છે તેવી આકૃતિ દોરી છે, એમ ધારો. આ આકૃતિમાં **ईफ** લીટી શું દર્શાવે છે? "**अबडक** કાગળના કડકાને દુભાગનાર સળની જગા." **ईफ** લીટીની દિશામાં એક આગળ એક, એમ લીટીઓ દોરીને **ईफ** અને **अब** વચ્ચેની જગા પૂરી દો. એવી કેટલી લીટીઓ દોરી શકાય? ધારો કે દસ લીટીઓ દોરી શકાય છે. જો દસ લીટીઓ વડે **ई**થી **अ** સુધીની જગા પુરાઈ જાય, અને **ई**થી **अ** સુધીનું અંતર ૧૦ ઇંચ હોય, તો દરેક લીટી કાગળની કેટલી લંબાઈ દર્શાવે છે? "એક ઇંચ." જો દરેક લીટી કાગળનો એક ઇંચ પહોળો કકડો દર્શાવે છે, તો **ईफ** લીટી જે સળ બતાવે છે, તે સળ ખરેખર એક ઇંચ પહોળો છે કે? તેની ખરી પહોળાઈ કેટલી? સળે સળે કાગળ કાપ્યો હોય, તો સળની પહોળાઈ કાગળના ક્યા ભાગમાં જશે? તે કોઈ પણ ભાગમાં ન જાય એવી રીતે કાગળ કાપી શકાશે કે નહિ? "કાપી શકાશે." ત્યારે સળને પહોળાઈ છે કે? "ના." સળને જો પહોળાઈ નથી, તો **ईफ** લીટીને પહોળાઈ શા માટે છે?

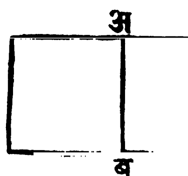
अबडक એક ખેતર છે, અને તે **क्ष** અને **ज्ञ** એ બે ભાઈઓને વહેંચી લેવું છે. તેમણે તેના **अबफई** અને **ईफडक** એવા બે સરખા ભાગ કર્યા, અને દરેક જણે એકેક ભાગ લીધો. ધારો કે **क्ष**ને ભાગે દક્ષિણ તરફ-નો કકડો આવ્યો, અને **ज्ञ**ને ભાગે ઉત્તર તરફનો કકડો આવ્યો.



આ બે કકડા પાસેની આકૃતિમાં બતાવ્યા છે. તેમની વચ્ચે કંઈ જગા છે કે? "ના." છે એમ જો તમે કહો, તો તે બે ભાઈઓમાંથી કોને ભાગે આવી છે, એ તમારે કહેવું જોઈએ. બે કકડાની વચ્ચે જો જગા નથી, તો **ईफ** લીટી દોરી છે તે શા માટે? તે લીટી ખેતરનો કયો ભાગ દર્શાવે છે? "કોઈ પણ નહિ." **ईफ** લીટીની નીચે **अब** લીટી સુધી એકમેકને અડકાડીને એક પછી એક લીટીઓ દોરો. ધારો કે એવી વીસ લીટીઓ **ईफ**થી **अब** સુધીની જગા ભરી કાઢે છે. હવે જો વીસ લીટીઓ વડે **ई**થી **अ** સુધીની જગા રોકાઈ જાય, અને **ईअ**ની લંબાઈ જો વીસ ફુટ હોય, તો દરેક લીટી કેટલી જગા દર્શાવે? "એક ફુટ પહોળી." **ईफ** લીટી એક ફુટ પહોળી જગા દર્શાવે, તો એ કકડો (**ईफ** લીટીથી દર્શાવાતી એક ફુટ પહોળી અને ... ફુટ લાંબી જગા) કોનો? **क्ष**ના અને **ज्ञ**ના ભાગના કકડાઓની વચ્ચે જો જગા રાખવાનું કારણ નથી, તો **ईफ** લીટી શા માટે દોરી છે? "......" જો આ લીટી જગા દર્શાવતી નથી, તો તે ખરેખર શું દર્શાવે છે? "**क्ष**ની જમીન ક્યાં પુરી થાય છે, અને **ज्ञ**ની જમીન ક્યાં શરૂ થાય છે, તે તે દર્શાવે છે."

ત્યારે લીટી ખરેખર જગા દેખાડે છે, કે હદ? "હદ."

એ છેક લીસા ઘન લઈને એક બીજાને બરાબર અડકાડીને મૂક્યા હોય, તો તેમનું ચિત્ર આપણે શી રીતે દોરીશું? પાસે દોરેલી આકૃતિ જુઓ. આ આકૃતિમાં **अब** લીટી કાગળ પર કેટલીક જગા રોકે છે, એ કારણથી શું આપણે એ ઘનની વચ્ચે કેટલીક જગા છે એમ ધારી શકીએ? "ના." ત્યારે આ લીટી શા માટે દોરી છે? આ લીટી ક્ષેત્રફળ દેખાડે છે કે હદ? "હદ."



એક કાગળના કેટલાક ભાગને કાળો કે બીજો કોઈ રંગ લગાડયો હોય, તો તે રંગેલો ભાગ અને બાકીનો ધોળો ભાગ એમની વચ્ચેની હદનો રંગ શો? તેને જો રંગ નથી, તો હદ દેખાડનારી લીટીની પહોળાઈ કેટલી? આ લીટીને પહોળાઈ હોઈ શકે કે? "ના."

ઉપલા દાખલામાં એ ઘન જયાં એક બીજાને મળે છે, અથવા જયાં ખેતરના એ ભાગ એક બીજાને મળે છે, તે જગાને પહોળાઈ છે કે? "ના." લંબાઈ છે કે? "છે." આ જગા દેખાડવાને આપણે જે લીટી દોરીએ છીએ, તેને સહેજસાજ તો પહોળાઈ છેજ. પણ મૂળ જગાને પહોળાઈ ન હોય તો તે જગા દર્શાવનારી લીટીને પહોળાઈ શા માટે રાખવી? પહોળાઈ રાખ્યા વગર તે લીટી દોરી શકાશે કે? "ના." એવી લીટી કાઢી શકાય નહિ, તેથી આપણે લીટીને પહોળાઈ રાખીએ છીએ. બાકી ખરેખર જોતાં **લીટીને પહોળાઈ હોતી નથી.***

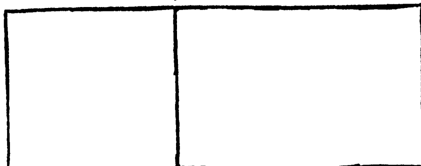
---

* પાસે દેખાડેલી આકૃતિ એક ખેતરનો નકશો છે. ધારો કે

લીટી દોરવાનો હેતુ—કોઈ પદાર્થ ક્યાં શરૂ થાય છે, તે ક્યાં પુરો થાય છે, તેનો આકાર કેવો છે, અથવા તે કઈ દિશા તરફ વધે છે એ દેખાડવા માટે આપણે લીટી દોરીએ છીએ.

તેથીજ, જેને લંબાઈ છે પણ (ખરી) પહોળાઈ નથી તે **લીટી,** એવી લીટીની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

તેમાં અ ઝાડથી બ ઝાડ સુધી એક કરોળીઆ-એ પોતાનો તાંતણો તાણ્યો છે. હવે ખેતરના



નકશાનું સ્કેલ આપ્યું હોય, તો કરોળીઆના તાંતણાની લંબાઈ કેટલી છે તે કહી શકશો? ધારો કે તે સ્કેલ ૧″=૧૦′ છે; તો તે તાંતણાની લંબાઈ શી રીતે નક્કી કરશો? "અબ લંબાઈ માપો. તે જેટલા ઇંચ ભરે તેને ૧૦એ ગુણો. જવાબ આવે તેટલા ફુટ સમજવા." અબ લીટીને કંઈ પહોળાઈ છે કે? "ના." એમ કદાચ તમે કહેશો. અબથી આકૃતિના છેડા સુધી એક બીજીને અડકી રહે એવી લીટીઓ દોરો. ધારો કે એવી ૧૨૦ લીટી અબથી કડ સુધીની જગા ભરી કાઢે છે. હવે જો અથી ક સુધીનું અંતર ૧૦ ફુટ હોય, તો દરેક લીટીની પહોળાઈ $\frac{૧૦\times૧૨=૧૨૦}{૧૨૦}$=૧ ઇંચ અંતર દર્શાવે છે. જે લીટી કરોળીઆનો તાંતણો દર્શાવે છે, તે જો એક ઇંચ પહોળાઈ દર્શાવે, તો કરોળીઆના તાંતણાની પહોળાઈ (જાડાઈ) ૧ ઇંચ છે એમ નથી થતું કે? જો લીટીની લંબાઈ પરથી તાંતણાની લંબાઈ નક્કી કરવાની હોય, તો તેની પહોળાઈ પરથી તાંતણાની પહોળાઈ (જાડાઈ) શા માટે નક્કી ન કરવી? જેથી તાંતણાની પહોળાઈ (એટલે જાડાઈ) બરાબર દર્શાવી શકાય એવી લીટી દોરો. "એવી લીટી કાઢી શકાતી નથી." ત્યારે લીટીને પહોળાઈ નથી એમ માનવાની ખાસ જરૂર છે? "હા."

વાળ અથવા ઝીણો દોરો એ લીટી છે કે? "ના." કારણ કહો. અક્ષાંશવૃત્તો, રેખાંશવૃત્તો,......વગેરે લીટીઓ છે કે? કારણ કહો. લીટીને લંબાઈ, પહોળાઈ, જાડાઈ, એમાંથી કયાં પરિમેયો હોય છે? "લંબાઈ." ત્યારે હવે લીટીને કેટલાં પરિમેયો હોય છે? "એક."

બિંદુ.

એક બીજીને છેદતી બે લીટી દોરો. આ લીટીઓ એક બીજીને જે ભાગમાં છેદે છે, તે ભાગ સિવાય બાકીનો બધો ભાગ ભૂસી નાખો. જે ભાગ રહ્યો છે તે જુઓ, અને બે લીટીઓ એક બીજીને જ્યાં છેદે છે ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે તે કહો. "બિંદુ."

એક દશાંશ ઇંચ પહોળી બે લીટીઓ એક બીજીને છેદે, તો તે જે બિંદુમાં (એટલે જગામાં) છેદે છે, તે બિંદુની લંબાઈ પહોળાઈ કેટલી? "એક દશાંશ ઇંચ."

એક વીસાંશ ઇંચ પહોળી બે લીટીઓ એક બીજીને છેદે, તો તે જે બિંદુમાં છેદે છે તે બિંદુની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી? "એક વીસાંશ ઇંચ."

હવે જો લીટીને ખરેખર પહોળાઈ નથી, તો બે લીટીઓ એક બીજીને જે બિંદુમાં છેદે છે તે બિંદુની લંબાઈ પહોળાઈ કેટલી? "બીલકુલ નહિ."

બે લીટીઓ એક બીજીને જ્યાં છેદે છે, ત્યાં બિંદુ બને છે. લીટીને ખરી પહોળાઈ હોતી નથી, માટે બિંદુને પણ લંબાઈ પહોળાઈ હોતી નથી. એમ છતાં બિંદુ અમુક સ્થાનમાં હોય છે, તેથી તેને **સ્થાન કે સ્થિતિ** હોય છે.

તેથી, 'જેને સ્થિતિ છે પણ મહત્ત્વ નથી તે **બિંદુ**,' એવી બિંદુની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

પૃથ્વીના ધ્રુવ, સોયની અણી, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, ગુરુત્વ-મધ્યબિંદુ, ખુણાનું શિરોબિંદુ...........એ પૈકી બિંદુ ક્યાં છે અને ક્યાં નથી ?

પહોળાઈ વગરની લીટી, અને લંબાઈ અને પહોળાઈ વગરનું બિંદુ, કાઢવાં અશક્ય છે; માટે જે બિંદુ અને લીટીઓ આપણે કાઢીએ છીએ, તેમને ઉપલી વ્યાખ્યા પુરેપુરી લાગુ પડતી નથી.

બિંદુ આગળ ખસતું ગયું એવી કલ્પના કરીએ, એટલે લીટી બને છે; લીટી લંબાઈની સાથે ખુણો કરીને ખસતી ગઈ એવી કલ્પના કરીએ, એટલે પૃષ્ઠ બને છે; અને પૃષ્ઠ લંબાઈ અને પહોળાઈ જોડે ખુણો કરીને વધતું ગયું એવી કલ્પના કરીએ, એટલે ઘનાકૃતિ બને છે.



નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧.



ખંડ બીજો.

(પ્રમેય-સિદ્ધાંત.)

કેટલીક પારિભાષિક સંજ્ઞાઓનો અર્થ.

(નીચેનું સ્પષ્ટીકરણ દેવકુળેકૃત યુક્લિડમાંથી લીધું છે.)

સિદ્ધાંત—જે શબ્દસમૂહમાં (૧) કંઈ સત્ય સિદ્ધ કરેલું હોય છે, અથવા (૨) કંઈ રચના કરી બતાવેલી હોય છે, તે શબ્દસમૂહને **સિદ્ધાંત** કહે છે.

પ્રમેય અને **કૃત્ય**—ઉપર સિદ્ધાંતના લક્ષણમાં જે બે પ્રકારના શબ્દસમૂહ કહ્યા, તેમાંથી પહેલાને **પ્રમેય** કહે છે, અને બીજાને **કૃત્ય** કહે છે.

ઉપસિદ્ધાંત—જે સિદ્ધાંત બીજા કોઈ સિદ્ધાંતમાંથી એમ ને એમ નીકળે છે, અથવા જે તેની મદદથી ટુંકામાં સિદ્ધ થાય છે, તેને તે સિદ્ધાંતનો **ઉપસિદ્ધાંત** કહે છે.

પ્રતિજ્ઞા—અમુક એક અથવા વધારે બાબતો આપેલી છે અને અમુક એક બાબત સિદ્ધ કરવી છે, એવું જે શબ્દસમૂહમાં જણાવેલું હોય છે, તેને **પ્રતિજ્ઞા** કહે છે. જેમ કે;— " સમબાજુ ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે. "

પક્ષ અને **સાધ્ય**—કોઈ પણ સિદ્ધાંતમાં જે (એક કે વધારે) બાબતો આપેલી હોય છે, તે બધી એકઠી મળીને તે સિદ્ધાંતમાંનો **પક્ષ** કહેવાય છે; અને જે બાબત સિદ્ધ કરવાની હોય છે, અથવા જે એક કૃતિ કરવાની હોય છે, તે તે સિદ્ધાંતમાંનું **સાધ્ય** કહેવાય છે.

વ્યત્યાસ—કોઈ પણ સિદ્ધાંતમાંના પક્ષને બદલે, અથવા પક્ષમાં અનેક બાબતો હોય તો તેમાંથી કોઈ એક બાબતને બદલે, તેમાંનું સાધ્ય મૂકયું હોય; અને સાધ્યને બદલે પક્ષ

અથવા પક્ષમાંની પેલી એક બાબત મૂકી હોય, તો એવી રીતે જે સિદ્ધાંત થાય છે તેને મૂળ સિદ્ધાંતનો વ્યત્યાસ કહે છે. જેમકે:–"સમબાજુ ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે." આ મૂળ સિદ્ધાંત ગણ્યો હોય, તો "સમકોણ ત્રિકોણ સમબાજુ હોય છે," એ તેનો વ્યત્યાસ થાય. "જે સંખ્યામાંના આંકડાનો સરવાળો ત્રણ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે, અને જેના એકમના સ્થાનમાં શૂન્ય હોય છે, તે સંખ્યા છ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે;" આ મૂળ સિદ્ધાંત ગણ્યો હોય, તો "જે સંખ્યામાંના આંકડાનો સરવાળો ત્રણ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે અને આખી સંખ્યા પુરેપુરી રીતે છ વડે ભાગી શકાય છે, તેના એકમના સ્થાનમાં શૂન્ય હોય છે;" આ તેનો વ્યત્યાસ થાય.

સૂચના—(૧) આગળના પ્રમેયોમાં જે રચનાની જરૂર પડશે, તે આ પુસ્તકના પહેલા પ્રકરણમાં કહ્યા પ્રમાણે કરવાની છે. આ રચનાને ત્રીજા ખંડમાં આપેલા કૃત્યસિદ્ધાંતોની જરૂર નથી. કૃત્યોમાં રચના કરવાની રીત ઉપરાંત રચનાની સિદ્ધતા આપેલી હોય છે, પરંતુ આ સિદ્ધતાની પ્રમેયોને જરૂર નથી; કારણ કે પ્રમેયોને જરૂરની રચના બરાબર છે એમ ધારી લીધું હોય તોપણ ચાલે; માત્ર એ રચના કરવી શક્ય હોવી જોઈએ; નહિ તો (આ રચના પર આધાર રાખતી) સિદ્ધતા ખોટી ઠરશે. આ કારણને લીધે નવી ભૂમિતિમાં કૃત્યોના પહેલાં પ્રમેયો શીખવી શકાય છે.

(૨) નવી ભૂમિતિમાં સર્વે આકૃતિઓ બરાબર કાઢવાની બહુ જરૂર છે, એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ.

સંક્ષેપચિહ્નોનો અર્થ.

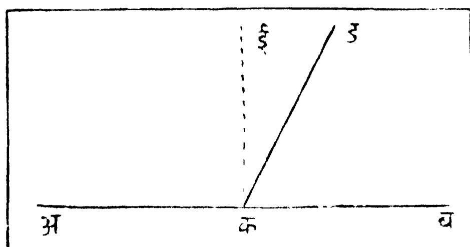
+ એટલે વત્તા. — એટલે ઓછા.
= એટલે ની બરાબર. ‖ એટલે સમાંતર.
> એટલે થી મોટો. ∠ એટલે થી નાનો.
∴ એટલે માટે, તેથી. ∵ એટલે કારણ કે.
∟ એટલે ખુણો. △ એટલે ત્રિકોણ.

⊙ એટલે વર્તુળ. ▱ એટલે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ.

≡ એટલે એકરૂપ (બધી રીતે સરખા) છે.
પ્ર૦ એટલે પ્રમેય. કૃ૦ એટલે કૃત્ય.

પ્રમેય ૧.

એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી પર પડે, તો તે બીજી લીટીની એક બાજુએ જે પાસપાસેના બે ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.



પક્ષ—**डक** સીધી લીટી **अब** સીધી લીટી પર પડે છે.

સાધ્ય—∠**अकड**+∠**बकड**=૨ કાટખુણા.

अब પર **डक** લંબ હોય, તો ∠**अकड**+∠**बकड**=૨ કાટખુણા એ સિદ્ધજ છે. પરંતુ **अब** પર **डक** લંબ ન હોય તો—

રચના—**अब** પર **कई** લંબ દોરો.

સિદ્ધતા—∠**अकड**=∠**अकई**+∠**ईकड**. (પ્રત્યક્ષ.)
∠**बकड**=∠**बकई**−∠**ईकड**. „
∴ ∠**अकड**+∠**बकड**=∠**अकई**+∠**बकई**.
પણ **अकई**+**बकई**=૨ કાટખુણા. (રચના.)
∴ ∠**अकड**+∠**बकड**=૨ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત—એક બિંદુમાંથી અનેક લીટીઓ દોરી હોય, તો તે લીટીઓ વચ્ચે થતા સર્વ ખુણાનો સરવાળો ૪ કાટખુણા બરાબર હોય છે.

૧ લા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. **अमब** અને **कमड** આ બે લીટીઓ એક બીજીને **म** બિંદુમાં છેદે છે, અને **अमक** કાટખુણો છે; તો **म** બિંદુ પાસેના બાકીના ખુણા કાટખુણા છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. **अबक** ત્રિકોણમાં ∠**अबक** = ∠**अकब**, અને **बक**ને બંને બાજુએ વધારેલી છે; તો બહારના ખુણા સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

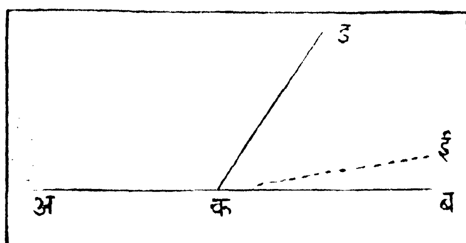
૩. **अबक** ખુણાને **बड**થી દુભાગ્યો છે, અને **डब**, **ई** સુધી વધારેલી છે; તો ∠**अबई** = ∠**कबई** એ સિદ્ધ કરો.

૪. **अब** લીટીને **कड** લીટી **क** બિંદુમાં મળે છે, અને ∠**अकड**, ∠**डकब** અનુક્રમે **कई** અને **कफ** લીટીઓ વડે દુભાગેલા છે; તો ∠**ईकफ** કાટખુણો છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. જો **अब** લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી અનેક લીટીઓ **अब**ની એકજ બાજુએ દોરેલી હોય, તો તેથી બનેલા સર્વ ખુણાનો સરવાળો ૨ કાટખુણા બરાબર છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૨.

જો બે પાસપાસેના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય, તો તે ખુણાઓના બહારના ભુજો એકજ સીધી લીટીમાં હોય છે.



પક્ષ—अकड અને **डकब** એ પાસપાસેના ખુણા છે, અને તેમનો સરવાળો બે કાટખુણા છે.

સાધ્ય—कअ અને **कब** એકજ સીધી લીટીમાં છે.

રચના—જો **कअ** અને **कब** એકજ સીધી લીટીમાં ન હોય, તો **अक**ને વધારીને **अकई** સીધી લીટી દોરો.

સિદ્ધતા-∵ **अकई** સીધી લીટી છે,

∴ ∠**अकड**+∠**डकई**=૨ કાટખુણા. (પ્ર. ૧)

પણ ∠**अकड**+∠**डकब**=૨ કાટખુણા, (પક્ષ.)

∴ ∠**अकड**+∠**डकई**=∠**अकड**+∠**डकब**.

દરેક બાજુમાંથી સાધારણ ∠**अकड** બાદ કર્યો;

∴ શેષ ∠**डकई** = શેષ ∠**डकब**.

∴ **कई**, **कब**માં મળી જાય છે, એટલે **कई**, **कब**ની બહાર કે અંદર પડી શકતી નથી; અર્થાત્ **कअ**, **कब** એકજ સીધી લીટીમાં છે.

સૂચના—પ્રમેય ૧ માં **कअ** અને **कब** એક સીધી લીટીમાં છે, એ પક્ષ છે; અને ∠**अकड**+∠**बकड**=૨

કાટખુણા, એ સાધ્ય છે; અને બીજા પ્રમેયમાં ∠**अकड**+∠**बकड**=૨ કાટખુણા, એ પક્ષ છે; અને **कअ, कब** એક સીધી લીટીમાં છે એ સાધ્ય છે. માટે પ્રમેય ૨ પ્રમેય ૧ નો **વ્યત્યાસ** છે.

૨ જા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. **अब** લીટીમાંના **अ** બિંદુમાંથી **अब**ની બંને બાજુએ કાટખુણા કરીને **अक** અને **अड** લીટીઓ દોરેલી છે, તો **कअड** એક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

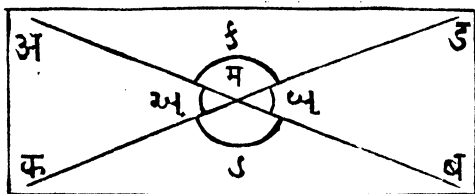
૨. **अमक** લીટીમાંના **म** બિંદુમાંથી તેની બંને બાજુએ **मब, मड** લીટીઓ એવી દોરેલી છે, કે ∠**अमब**=∠**कमड**; તો **बमड** એક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૩. **म** બિંદુમાંથી **मब, मअ, मक** એ ત્રણ લીટી દોરેલી છે; અને **मप** લીટી ∠**बमअ**ને અને **मद** લીટી ∠**अमक**ને દુભાગે છે. હવે જો **पमद** કાટખુણો હોય, તો **बमक** સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૪. બે લીટીઓ એક બીજીને કાટખુણે છેદે છે; તો તેમના સામસામા ખુણા દુભાગનારી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૩.

જો બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને છેદતી હોય, તો તેમના શિરોબિંદુ આગળના સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.



પક્ષ—अब અને **कड** સીધી લીટીઓ **म** બિંદુમાં એક બીજીને છેદે છે, તેથી સામસામા ખુણાઓની બે જોડ થાય છે; એક ∠અ અને ∠બની બનેલી; અને બીજી ∠ક અને ∠ડની બનેલી.

સાધ્ય—∠અ=∠બ; અને ∠ક=∠ડ.

સિદ્ધતા—∵ **कमड** એક સીધી લીટી છે, અને **अम** તે પર પડે છે;

∴ ∠અ+∠ક=૨ કાટખુણા; (પ્ર૦ ૧.)

∵ **अमब** એક સીધી લીટી છે, અને **डम** તે પર પડે છે;

∴ ∠બ+∠ક=૨ કાટખુણા; (પ્ર૦ ૧.)

∴ ∠અ+∠ક=∠બ+∠ક.

દરેક બાજુમાંથી ∠ક સાધારણ કાઢી લીધો;

∴ શેષ ∠અ=શેષ ∠બ.

તેજ પ્રમાણે ∠ક=∠ડ એ સિદ્ધ કરી શકાશે.

(∠ક=∠ડ એ સિદ્ધ કરો.)

૩ જા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. જો કાટખુણાના ભુજોને શિરોબિંદુ અથવા મેલનબિંદુની* બીજી બાજુએ વધાર્યા હોય, તો બીજા જે ત્રણ ખુણા થાય છે તે બધા કાટખુણા હોય છે.

૨. **अमड** અને **बमक** એ લીટીઓ એક બીજીને **म** બિંદુમાં છેદે છે. **मय**, ∠**अमब**ને દુભાગે છે; તો એમ સિદ્ધ કરો કે **मय** વધારી હોય તો તે ∠**कमड**ને દુભાગે છે.

પ્રમેય ૧ થી ૩ ઉપરના પ્રશ્ન.

૧. સીધી લીટીને વર્તુળાકારમાં ફેરવીને પ્રમેય ૧ અને ૩ સિદ્ધ કરો.

---

* જે બિંદુમાં બે અથવા વધારે લીટીઓ મળે છે તેને તેમનું **મેલનબિંદુ** કહે છે.

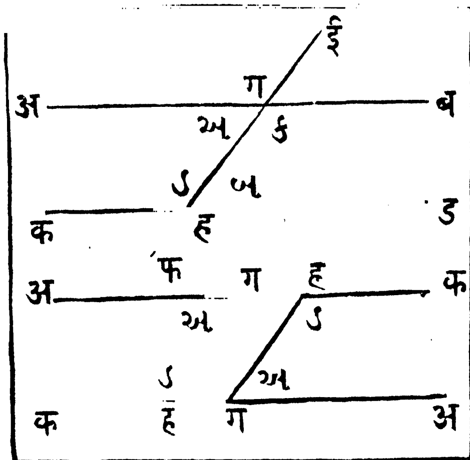
૨. એક બીજીને છેદનારી બે લીટીથી થએલા સામસામા બે ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં હોય છે.

૩. **म** બિંદુમાંથી **मअ, मब, मक, मड** આ સીધી લીટીઓ એવી રીતે દોરેલી છે, કે ∠**अमब**=∠**कमड**, અને ∠**बमक**=∠**अमड**; તો **अम** અને **मक**, તેમજ **बम** અને **मड** લીટીઓ એક સીધી લીટીમાં છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪. કોઈ પણ ખુણાના શિરોબિંદુમાંથી તે ખુણાના બંને ભુજ પર દોરેલા લંબોની વચ્ચેનો ખુણો મૂળ ખુણાની બરાબર હોય છે, અથવા તેનો ન્યુનતાપૂરક હોય છે.

પ્રમેય ૪.

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને છેદે અને વ્યુત્ક્રમ ખુણા બરાબર કરે, તો તે બે લીટીઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે.



પક્ષ—**अब** અને **कड** લીટીઓને **ईफ** લીટી **ग** અને **ह** બિંદુઓમાં છેદે છે, અને ∠**અ** અને ∠**બ** વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે.

સાધ્ય—अब ॥ कड.

સિદ્ધતા—

∵ ∠અ+∠ક=૨ કાટખુણા, (પ્ર. ૧)

અને ∠બ+∠ડ=૨ કાટખુણા, (પ્ર. ૧)

∴ ∠અ+∠ક=∠બ+∠ડ.

પણ ∠અ=∠બ. (પક્ષ.)

∴ ∠ક=∠ડ.

अगहक આકૃતિ કાપી કાઢો (અથવા તેની નકલ લો) અને તે **बगहड** આકૃતિ પર એવી રીતે મૂકો, કે **ह** બિંદુ **ग** પર પડે, અને **हक, गब**ની દિશામાં પડે.

તો ∵ ∠ડ=∠ક, (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

∴ **हग, गह**ની દિશામાં પડશે;

અને ∵ **हग=गह,**

∴ **ग** બિંદુ **ह** બિંદુ પર પડશે.

હવે ∵ ∠અ=∠બ,

∴ **गअ, हड**ની દિશામાં પડશે.

આ પ્રયોગ પરથી સિદ્ધ થાય છે કે **गब** અને **हड** જે દિશામાં પડે છે, તેજ દિશામાં **हक** અને **गअ** પડે છે.

હવે **अब, कड** લીટીઓ સમાંતર ન હોય, તો તે કોઈ પણ એક બાજુએ મળવી જોઈએ. તે **ब** અને **ड**ની બાજુએ મળે છે એમ ધારીએ, તો તેમનીજ દિશામાં પડનારી **हक, गअ** એ લીટીઓ પણ **अ** અને **क** તરફ મળશે એમ ધારવું જોઈએ. પણ જો **अब, कड** એ **अ, क** તરફ મળે છે એમ ધારીએ, તો તેમની અને **गब, हड**ની દિશા એકજ હોવાથી **गब** અને **हड** પણ **ब, ड** તરફ મળશે એમ ધારવું જોઈએ (એટલે કે **अब** અને **कड** બંને છેડા તરફ મળે છે).

પણ જે બે સીધી લીટીઓ વચ્ચે કંઈ અંતર છે, તે જો

બંને છેડા તરફ મળે, તો એનો અર્થ એજ થાય કે બે સીધી લીટીઓ જગા ઘેરી લે છે. પણ આ વાત અશક્ય છે. (૧૨૧મા પાના પરનો પ્રયોગ જુઓ.) માટે સિદ્ધ થાય છે કે **अब, कड** કોઈપણ બાજુએ મળતી નથી, એટલે તેઓ સમાંતર છે.

૪થા પ્રમેય પરનો પ્રશ્ન.

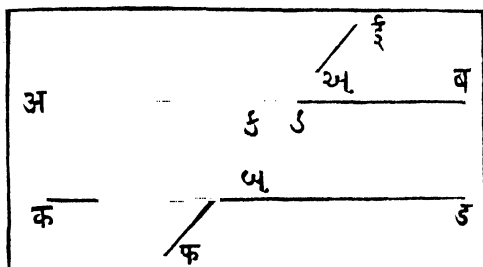
૧. **अबकड** એક ચતુષ્કોણ છે અને **अक** તેનો કર્ણ છે. જો ∠**बअक** બરાબર ∠**अकड**, અને ∠**डअक**= ∠**अकब**, તો **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૫.

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને એવી રીતે છેદે કે—

(૧) બે સંગત ખુણા બરાબર હોય, અથવા

(૨) છેદક લીટીની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય, તો તે બે સીધી લીટીઓ સમાંતર હોય છે.



(૧) **પક્ષ—अब** અને **कड** લીટીઓને **ईफ** છેદે છે, અને સંગત ખુણા **અ** અને **બ** બરાબર છે.

સાધ્ય—अब ॥ कड.

સિદ્ધતા—

∠ અ=સામેનો ∠ ક, (પ્ર. ૩.)
પણ ∠ અ=∠ બ, (પક્ષ.)
∴ ∠ બ=∠ ક.
અને ∵ ∠ બ અને ∠ ક વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે,
∴ **अब** ॥ **कड**. (પ્ર. ૪.)

(૨) **પક્ષ—ईफ** લીટીની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા બ અને ડ એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

સાધ્ય—अब ॥ **कड**.

સિદ્ધતા—

∵ **अब** એક સીધી લીટી છે અને તેને **फई** મળે છે,
∴ ∠ ક+∠ ડ=૨ કાટખુણા. (પ્ર. ૧.)
પણ ∠ બ+∠ ડ=૨ કાટખુણા, (પક્ષ.)
∴ ∠ ક+∠ ડ=∠ બ+∠ ડ.
દરેક બાજુમાંથી ∠ ડ એ સાધારણ ખુણો લઈ લીધો.
∴ ∠ ક=∠ બ.
અને આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે,
∴ **अब** ॥ **कड**. (પ્ર. ૪.)

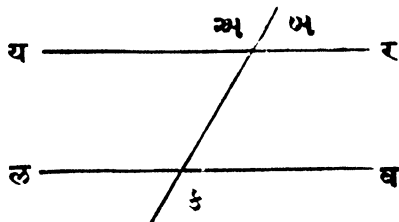
૫ મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. પાસેની આકૃતિમાં,

(૧) જો ∠ અ= ∠ ક હોય, અથવા

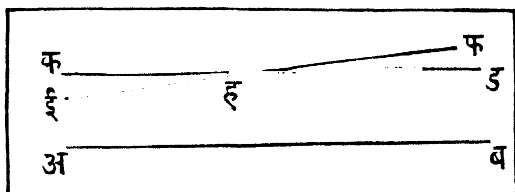
(૨) ∠ બ+∠ ક =૨ કાટખુણા હોય;

તો **यर** ॥ **लव** છે એમ બતાવો.



૨. જો એક સીધી લીટી પર બે લંબ દોર્યા હોય, તો તે એક બીજાને સમાંતર હોય છે.

પ્લેફેરનું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ—એક બીજીને છેદનારી બંને સીધી લીટી એક ત્રીજી સીધી લીટીને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.



દાખલા તરીકે, **कड**, **ईफ** સીધી લીટીઓ એક બીજીને **ह** બિંદુમાં છેદે છે. એ પૈકી **कड**, **अब**ને સમાંતર છે; તો **ईफ**, **अब**ને સમાંતર હોઈ શકશે નહિ. કારણ કે **कड** લીટી **अब**ને સમાંતર છે, એનો અર્થ એવો છે, કે **कड** અને **अब**ની વચ્ચેનું બધું અંતર સરખું છે. હવે જ્યારે **ईफ** અને **कड**ની વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું નથી, ત્યારે **ईफ** અને **अब** વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું હોઈ શકે નહિ. માટે **ईफ**, **अब**ને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.

સમાંતર લીટીઓના સંબંધમાં યુકિલડનું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નીચે પ્રમાણે છે:—

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીને એવી રીતે છેદે, કે તેની એકજ બાજુના બે અંદરના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય, તો તે બે લીટીઓ, જે બાજુ પરના ખુણાઓનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો છે, તે તરફ વધારવાથી મળશે.

આ વિધાન ખરૂં જોતાં પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નથી; તે પ્રમેય ૮ ના બીજા ઉપસિદ્ધાંતનો વ્યત્યાસ છે, એ આગળ જણાઈ આવશે.

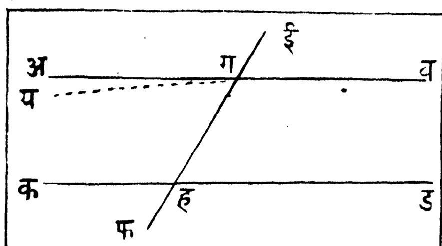
પ્રમેય ૬.

જો એક સીધી લીટી બે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદે તો તે—

(૧) વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા કરે છે;

(૨) સંગત ખુણા સરખા કરે છે; અને

(૩) છેદક લીટીની એકજ બાજુના બે અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક કરે છે.



પક્ષ—**अब** અને **कड** સીધી સમાંતર લીટીઓ છે, અને **ईफ** તેમને **ग** અને **ह** માં છેદે છે.

સાધ્ય—(૧) ∠**अगह** અને ∠**गहड** એ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે.

(૨) ∠**ईगब** અને ∠**गहड** એ સંગત ખુણા સરખા છે; અને

(૩) **ईफ**ની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા ∠**बगह** અને ∠**गहड** એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

રચના—જો ∠**अगह** અને ∠**गहड** સરખા ન હોય, તો એક **गय** લીટી એવી દોરો, કે **यगह** અને **गहड** વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા થાય.

(૧) સિદ્ધતા—

∵ ∠यगह=વ્યુત્ક્રમ ∠गहड, (રચના.)

∴ गय ॥ कड. (પ્ર. ૪.)

પણ अब ॥ कड, (પક્ષ.)

∴ गय અને अब એ બંને कडને સમાંતર.

પણ એ અશક્ય છે; (પ્લેફેરનું પ્ર. પ્ર.)

∴ ∠अगह, ∠गहड એ સરખા નથી એમ માની શકાતું નથી; એટલે કે તે સરખાજ છે.

(એજ પ્રમાણે ∠बगह=∠गहक એ સિદ્ધ કરી શકાય.)

(૨) સિદ્ધતા—

∠ईगब=સામેનો ∠अगह. (પ્ર. ૩.)

અને ∠अगह=∠गहड. (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

∴ ∠ईगब=∠गहड.

(એજ પ્રમાણે ∠ईगअ=∠गहक.)

(૩) સિદ્ધતા—

∵ ∠अगह=∠गहड, (પ્ર. ૬, ભાગ.૧.)

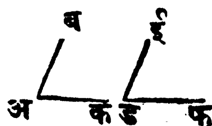
અને ∠बगह, ∠अगहનો ન્યૂનતાપૂરક છે,

∴ ∠बगह,∠गहडનો પણ ન્યૂનતાપૂરક છે.

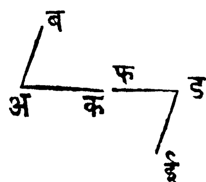
ઉપસિદ્ધાંત—જે બે ખુણાની બાજુઓ સમાંતર હોય, તે ખુણા સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

ઉપલા ઉપસિદ્ધાંતના ૪ પ્રકાર થાય છેઃ—

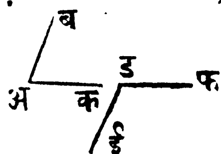
(૧) જો ∠बअक અને ∠ईडफની બાજુઓ સમાંતર હોય અને એકજ દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા સરખા હોવા જોઈએ.



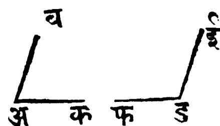
(૨) જો ∠**बअक** અને ∠**फडई**ની બાજુઓ સમાંતર હોય, અને તે સામસામી દિશામાં દોરલી હોય, તો તે ખુણા સરખા હોવા જોઈએ.



(૩) **डफ, अक** એકજ દિશામાં દોરેલી છે; અને **डई, अब** સામસામી દિશામાં દોરેલી છે. આ બાબતમાં ખુણા ન્યુનતાપૂરક છે.



(૪) જો **डफ,अक** સામસામી દિશામાં દોરેલી હોય, અને **डई,अब** એકજ દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા ન્યૂનતા-પૂરક હોવા જોઈએ.



૬ ઠ્ઠા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. **अबक** ત્રિકોણમાં ∠**ब**=∠**क**, **बक** પાયાને સમાંતર **डई** દોરેલી છે; તો ∠**अडई**=∠**अईड** એ સિદ્ધ કરો.

૨. § *જે લીટી બે સમાંતર લીટીઓમાંથી એક પર લંબ હોય છે, તે બીજી પર પણ લંબ હોય છે.

૩. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.

૪. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણાનો સરવાળો કેટલો થાય છે? આ ઉપરથી ત્રિકોણના સર્વ ખુણાનો

---

§ * આ ચિહ્ન જેમની શરૂઆતમાં છે તે પ્રશ્ન અગત્યના છે, એટલે બીજા પ્રશ્નો છોડવામાં તેમનો ઉપયોગ થવાનો વિશેષ સંભવ છે એમ જાણવું.

સરવાળો કેટલો થાય, તે નક્કી કરો. (ગમે તે ત્રિકોણ લો, અને તેના પાયાના બંને છેડામાંથી ત્રિકોણની સામી બાજુએ ત્રિકોણની બે બાજુને સમાંતર સીધી લીટીઓ દોરો, અને એવી રીતે ચતુષ્કોણ પુરો કરો. પછી ઉપલા સવાલનો જવાબ આપો.)

૫. * જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો બીજા બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે.

૬. * જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને એવી રીતે છેદે, કે તેથી તે લીટીની એકજ બાજુના અંદરના બે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય; તો તે બાજુ તરફ તે બે સીધી લીટીઓ વધારવાથી મળશે, એમ સિદ્ધ કરો.

૭. એક બીજીને છેદનારી કોઈ પણ બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેનો સાંકડો ખુણો, તે સીધી લીટીઓને સમાંતર હોઈને એકમેકને છેદનારી બીજી કોઈ પણ બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેના સાંકડા ખુણાની બરાબર હોય છે, અને પહોળો ખુણો તેને મળતા આવતા પહોળા ખુણાની બરાબર હોય છે.

૮. એક ખુણાના ભુજો બીજાના ભુજો ઉપર લંબ છે; તો તે ખુણા સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક છે એમ સિદ્ધ કરો.

૯. બે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદનારી લીટીથી થતા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને મળવાથી કાટખુણ ચોખુણ બને છે.

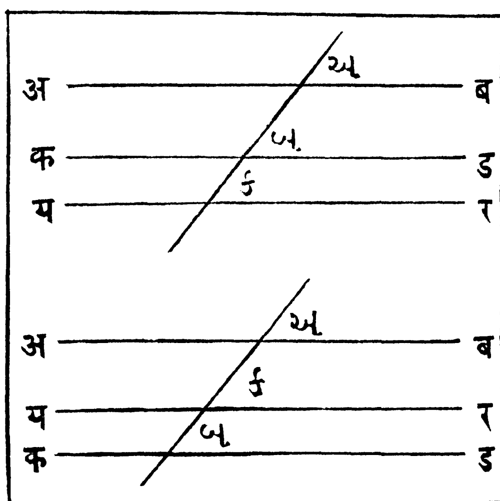
૧૦. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ કાટખુણ ચોખુણ કરે છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. **અબક** ત્રિકોણના **અ** શિરોબિંદુમાંથી **બક** પાયાને સમાંતર સીધી લીટી દોરીને, ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા થાય છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૨. **अब** અને **कड** એ સમાંતર સીધી લીટીઓને **प** અને **द** બિંદુઓમાં છેદનારી એક સીધી લીટી દોરેલી છે. એકજ બાજુ પરના **प** અને **द** ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ **म**માં મળે છે. આ આકૃતિને એક વખતે **मप** અને એક વખતે **मद**માંથી વાળીને **म** બિંદુ **पद**, **अब**, અને **कड**થી સરખે અંતરે છે એમ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૭.

જે સીધી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીને સમાંતર હોય છે, તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.



પક્ષ—अब અને कड ॥ यर.

સાધ્ય—अब ॥ कड.

રચના—अब, कड, અને यरને છેદનારી એક સીધી લીટી દોરો.

(∠અ, ∠બ, ∠ક, આ સંગત ખુણા છે.)

સિદ્ધતા—∵ अब ॥ यर, (પક્ષ).

∴ ∠અ=સંગત ∠ક. (પ્ર. ૬)

તેમજ ∵ कड ॥ यग, (પક્ષ).

∴ ∠બ=સંગત ∠ક. (પ્ર. ૬)

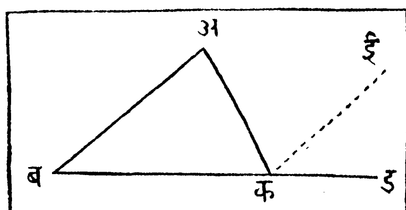
∴ ∠અ=∠બ.

∵ આ ખુણા સંગત છે,

∴ अब ॥ कड. (પ્ર. ૫)

પ્રમેય ૮.

ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.



પક્ષ—अबक ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય—∠अ+∠ब+∠क=૨ કાટખુણા.

રચના-बकને ड સુધી વધારો. कમાંથી बअ ॥ कई દોરો.

સિદ્ધતા—∵ बअ અને कई સમાંતર સીધી લીટીઓને अक છેદે છે,

∴ ∠अ=વ્યુત્ક્રમ ∠अकई. (પ્ર. ૬)

અને ∵ बअ અને कई સમાંતર સીધી લીટીઓને बड છેદે છે,

∴ ∠ब=સંગત ∠ईकड. (પ્ર. ૬)

∴ ∠अ+∠ब=∠अकई+∠ईकड.

દરેક બાજુમાં ∠अकब ઉમેરો.

∴ ∠अ+∠ब+∠अकब=∠अकई+∠ईकड+∠अकब.

પણ ∠अकब+∠अकई+∠ईकड=૨ કાટખુણા; (કારણ કે **बकड** એક સીધી લીટી છે); (પ્ર. ૧)

∴ ∠अ+∠ब+∠अकब=૨ કાટખુણા;

એટલે **अबक** ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો=૨ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—ત્રિકોણની એક બાજુ વધારવાથી થતો બહારનો ખુણો તેની પાસેના સિવાયના અંદરના બે ખુણાના સરવાળાની બરાબર હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણના કોઈ પણ બે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—ત્રિકોણની એક બાજુ વધારવાથી બનેલો બહારનો ખુણો તેની પાસેના સિવાયના કોઈ પણ અંદરના ખુણાથી મોટો હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૪—દરેક ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે ખુણા સાંકડા ખુણા હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૫—જો એક ત્રિકોણના બે ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખુણાની બરાબર હોય, તો તેમના ત્રીજા ખુણા પણ સરખા હોય છે. (એવા ત્રિકોણોને પરસ્પર સમકોણ પણ કહે છે.)

ઉપસિદ્ધાંત ૬—ચતુષ્કોણના ચાર ખુણાનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે.

૮ મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. **अबक** ત્રિકોણમાં ∠**ब**=∠**क** છે; **ब**અને **अ** તરફ **ड** સુધી લંબાવી છે; તો સાબીત કરો કે ∠**कअड**, ∠**ब** અથવા ∠**क**નો બમણો છે.

૨. કાટખુણ ત્રિકોણના બે સાંકડા ખુણા સરખા હોય, તો સાબીત કરો કે તે સરખા ખુણામાંનો દરેક ખુણો અર્ધો કાટખુણો છે.

૩. સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો કાટખુણાના બે તૃતીયાંશ બરાબર હોય છે.

૪. **अबक** ત્રિકોણના **अ** અને **ब** ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ **ड**માં મળે છે; તો **अडब** ખુણો પહોળો છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા બે ખુણાના સરવાળાથી ઓછો હોય, તો તે ખુણો સાંકડો હોય છે, એ સિદ્ધ કરો; અને એનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૬. ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા બે ખુણાના સરવાળાથી વધારે હોય, તો તે પહોળો ખુણો હોય છે, આ નિયમ અને તેનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

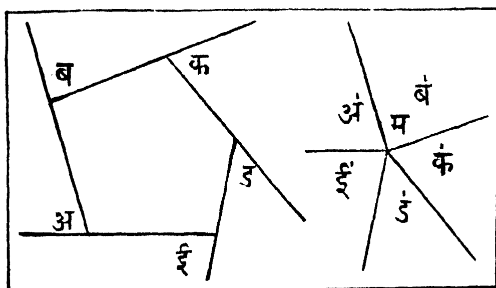
૭. કાટખુણ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલા લંબથી જે બે ત્રિકોણ થાય છે, તેમાંના દરેકના સર્વ ખુણા અનુક્રમે મૂળ કાટખુણ ત્રિકોણના ખુણાની બરાબર હોય છે.

પ્રમેય ૯.

બહિર્વક* સીધીલીટી-આકૃતિની સર્વ બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારી હોય તો તેથી બનેલા બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે.

---

* બહિર્વક—જેના સર્વ ખુણા બહારની બાજુથી બહિર્વક હોય, અથવા અંદરની બાજુથી અંતર્વક હોય, એવી.



પક્ષ—अबकडई આ બહિર્વક્ર સીધીલીટીવાળી આકૃતિની બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારવાથી ∠अ, ∠ब, ∠क, ∠ड, ∠ई આ બહારના ખુણા બનેલા છે.

સાધ્ય—∠अ+∠ब+∠क+∠ड+∠ई=૪ કાટખુણા.

રચના—આપેલી આકૃતિની બહાર કોઈ પણ **म** બિંદુ લો. (આ બિંદુ આપેલી આકૃતિમાં લીધું હોય તો પણ ચાલે.)

આપેલી આકૃતિની બાજુઓ જે દિશામાં વધારેલી હોય, તેજ દિશામાં, તે આકૃતિની બાજુઓને સમાંતર સીધી લીટીઓ **म** બિંદુમાંથી દોરો.

સિદ્ધતા—

∵ ∠अ, ∠ब, ∠क, ∠ड, ∠ईની બાજુઓને સમાંતર દોરેલી લીટીઓની વચ્ચે અનુક્રમે ∠अं, ∠बं, ∠कं, ∠डं, ∠ईं આ ખુણા છે;

∴ ∠अ=∠अं, ∠ब=∠बं, ∠क=∠कं, ∠ड=∠डं, ∠ई=∠ईं; (છઠ્ઠા પ્રમેયનો ઉપસિદ્ધાંત.)

∴ ∠अ + ∠ब+∠क+∠ड+∠ई=∠अं+∠बं+∠कं+∠डं+∠ईं.

અને ∵ ∠अं+∠बं+∠कं+∠डं+∠ईं=૪ કાટખુણા.

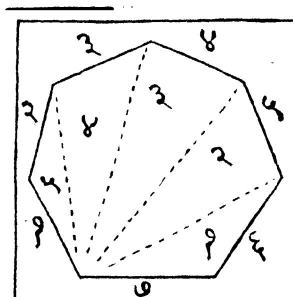
(પ્ર. ૧, ઉપ.)

$\therefore$ ∠अ+∠ब+∠क+∠ड+∠ई=૪ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત—स બાજુની સીધીલીટીવાળી આકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો (૨ स-૪) કાટખુણા થાય છે.

૯ મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. પ્રમેય ૯નો આધાર લીધા સિવાય ઉપલો ઉપસિદ્ધાંત, એક શિરોબિંદુને બીજાં શિરોબિંદુઓની જોડે સાંધીને, અને એવી રીતે તે આકૃતિના ત્રિકોણ બનાવીને સિદ્ધ કરો. (નીચેની આકૃતિ જુઓ. આ ત્રિકોણોની સંખ્યા **स**–૨ થાય છે.)



૨. એક ત્રિકોણની **अब**, **बक**, **कअ** બાજુઓ વધારવાથી ત્રણ બહારના ખુણા થયા છે. આ બહારના ખુણા પૈકી બે ખુણાનો સરવાળો જો બહારના ત્રીજા ખુણાથી બમણો હોય, તો ત્રિકોણનો એક ખુણો $\frac{2}{3}$ કાટખુણો છે એ બતાવો.

૩. **अबक** ત્રિકોણમાં **अड**, **बई**, **कफ** એવી દોરી છે, કે તેઓ **अब**, **बक**, **कअ**ની સાથે **डअब**, **ईबक**, **फकअ** ખુણા સરખા કરે છે. હવે જો **अड**, **बई**, **कफ** એક બિંદુમાં ન મળતી હોય, તો તેઓ એક ત્રિકોણ કરશે, અને તેના ખુણા **अबक** ત્રિકોણના ખુણાની બરાબર થશે, એ સિદ્ધ કરો.

૪. **अबकडई** એક પંચકોણ છે, અને એની કોઈ પણ બાજુઓ સમાંતર નથી. તે સર્વ બાજુઓ બંને તરફ વધારી હોય, તો **फ, ग, ह, च, ल** બિંદુઓમાં મળે છે; તો **फ, ग, ह, च, ल** ખુણાઓનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર છે એ બતાવો.

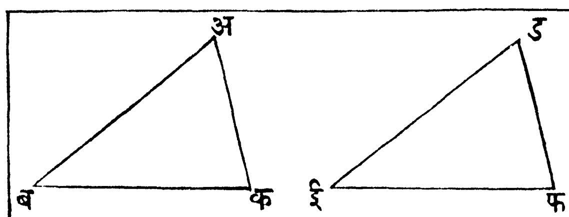
૫. જેમનો બહારનો ખુણો અનુક્રમે ૬૦°, ૩૦°, ૪૫° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિને બાજુ કેટલી ?

૬. જેનો એક બહારનો ખુણો ૧૫°, ७°, ૧૧°, ૬°, ૫° અથવા ૪૦° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિ હોઈ શકે ?

૭. જેનો અંદરનો ખુણો ૧૦૮°, ૧૨૦°, ૧૩૦°, ૧૪૪°, અથવા ૬૦° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિ હોઈ શકે ?

પ્રમેય ૧૦.

જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણાની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—**अबक** અને **डईफ** ત્રિકોણમાં **अब=डई; अक=डफ**, અને ∠अ=∠ड.

સાધ્ય—△ **अबक** ≅ △ **डईफ**.

સિદ્ધતા—

△ **अबक**ને △ **डईफ** પર એવી રીતે મૂકો, કે **अ** બિંદુ **ड** પર પડે, અને **अब** બાજુ **डई**ની દિશામાં પડે.

∵ **अब=डई**; (પક્ષ.)

∴ **ब** શિરોબિંદુ **ई** પર પડે છે.

અને ∵ ∠**अ**=∠**ड**, (પક્ષ.)

∴ **अक**, **डफ**ની દિશામાં પડે છે.

અને ∵ **अक=डफ**, (પક્ષ.)

∴ **क** શિરોબિંદુ **फ** પર પડે છે.

∴ △ **अबक**, △**डईफ** પર બરાબર આવી રહે છે; એટલે તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

૧૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * જો **अब** અને **कड** સીધી લીટીઓ એક બીજીને કાટખુણે દુભાગે, તો **अकबड** આકૃતિ સમબાજુ ચતુષ્કોણ થશે.

૨. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની **अब** અને **अक** સરખી બાજુઓમાં **क्ष** અને **य** બિંદુ એવાં લીધાં છે, કે **अक्ष=अय**; તો એમ સિદ્ધ કરો કે **कक्ष=बय** છે અને **कक्ष** અને **बय**, **बक** સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૩. * જો **अब** અને **कड** સીધી લીટીઓ એક બીજીને દુભાગે, તો **अकबड** આકૃતિ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ થાય.

૪. * **अबक** ત્રિકોણના **बक** પાયાનું **ड** મધ્યબિંદુ છે. **अ** અને **ड** સાંધો, અને **अड**ને **ई** સુધી એવી રીતે વધારો, કે **डई=अड** થાય. એમ સિદ્ધ કરો કે **अब=ईक**, અને **अक** ॥ **ईब**.

૫. **अबकड** એક ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં **अब=कड**, **अड=बक**, અને ∠**अ**=∠**क** છે; તો **अबकड** સમાંતર-બાજુ ચતુષ્કોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૬. * ચેારસનેા કર્ણ જે ખુણાઓમાં થઈને જાય છે તેમને દુભાગે છે અને ચેારસને પણ દુભાગે છે, એ સિદ્ધ કરેા.

૭. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકેાણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી (૧) પાયાને દુભાગે છે, (૨) પાયા પર લંબ થાય છે, (૩) તે ત્રિકેાણને દુભાગે છે, અને (૪) આ લીટીમાંનું કેાઈ પણ બિંદુ પાયાના બે છેડાથી સરખે અંતરે હેાય છે.

૮. * ત્રિકેાણની કેાઈ પણ બે બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી તે બાજુઓ પર દેારેલા લંબ જે બિંદુમાં મળે છે તે બિંદુ ત્રિકેાણના શિરેાબિંદુઓથી સરખે અંતરે હેાય છે.

૯. * લીટીને દુભાગનાર લંબમાંનું કેાઈ પણ બિંદુ તે લીટીના બંને છેડાથી સરખે અંતરે હેાય છે.

૧૦. **अबकड** અને **यरलव** ચતુષ્કેાણેામાં **अब=यर**, **बक=रल**, **कड=लव**, ∠**ब**=∠**र**, અને ∠**क**=∠**ल**: તેા આ આકૃતિઓ એકરૂપ છે એમ સિદ્ધ કરેા.

૧૧. * **अब** અને **कड** લીટીઓ સરખી અને સમાંતર છે, તેા **अक** અને **बड** સરખી અને સમાંતર છે એ બતાવેા.

૧૨. બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકેાણેાના પાયાની સામેના ખુણા સરખા છે, અને તેમાંનેા એક ત્રિકેાણ બીજા પર એવી રીતે મૂકેલેા છે, કે તેમના પાયાની સામેના ખુણા એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે. હવે એમ સિદ્ધ કરેા કે તે ત્રિકેાણેા-માંના એકનાં શિરેાબિંદુઓની સાથે બીજા ત્રિકેાણનાં શિરેા-બિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ સરખી છે.

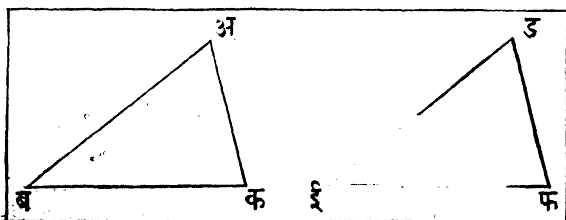
૧૩. **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકેાણની **अब** અને **अक** બાજુ પર **अबह** અને **अकच** એવા સમબાજુ ત્રિકેાણ બહારની બાજુએ દેારેલા છે; તેા **कह=बच** એ સિદ્ધ કરેા.

૧૪. **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકેાણની **अब** અને **अक** બાજુ પર બહારની બાજુએ **अबहच** અને **अकलम** ચેારસ દેારેલા છે; તેા **बम=चक** એ બતાવી આપેા.

૧૫. **अबकड** ચોરસમાં **म** બિંદુ ગમે ત્યાં લીધેલું છે. **मअ** પર **अड**ની બાજુએ **अमईफ** ચોરસ દોર્યો છે; તો **बम=डफ** એ બતાવો.

પ્રમેય ૧૧.

જો બે ત્રિકોણમાંના એકના બે ખુણા અનુક્રમે બીજાના બે ખુણાની બરાબર હોય, અને એકની એક બાજુ તેને મળતી આવતી બીજાની એક બાજુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પ્રકાર ૧ લો—

પક્ષ—अबक અને **डईफ** આ બે ત્રિકોણમાં ∠**ब**=∠**ई**, ∠**क**=∠**फ**, અને **बक**=**ईफ** (સરખા ખુણાઓને અડકેલી બાજુઓ.)

સાધ્ય—△**अबक** ≡ △ **डईफ**.

સિદ્ધતા—

△ **अबक**, △ **डईफ** પર એવી રીતે મૂકો, કે **ब**, **ई** પર પડે, અને **बक**, **ईफ**ની દિશામાં પડે.

હવે ∵ **बक=ईफ**, (પક્ષ.)

∴ **क**, **फ** પર પડે છે.

અને ∵ ∠**ब**=∠**ई** અને ∠**क**=∠**फ**, (પક્ષ.)

∴ **बअ**, **कअ** અનુક્રમે **ईड**, **फड**ની દિશામાં પડે છે.

∴ **अ**, **ड** પર આવી રહે છે.

∴ △ **अबक** ≡ △ **डईफ**.

પ્રકાર ૨ જો—

પક્ષ—अबक અને **डईफ** ત્રિકોણોમાં ∠**ब**=∠**ई**, ∠**क**=∠**फ** અને **अब=डई** (બંને ત્રિકોણોમાંના એકેક સરખા ખુણાની સામેની બાજુએ સરખી.)

સાધ્ય—△ **अबक** ≡ △ **डईफ.**

સિદ્ધતા—∠अ+∠ब+∠क=૨ કાટખુણા. (પ્ર. ૮)

∠ड+∠ई+∠फ=૨ કાટખુણા. ,,

∴ ∠अ+∠ब+∠क=∠ड+∠ई+∠फ.

પણ ∠ब+∠क=∠ई+∠फ, (પક્ષ.)

∴ શેષ ∠अ=શેષ ∠ड.

હવે **अबक** અને **डईफ** ત્રિકોણોમાં,

∵ ∠अ=∠ड,

∠ब=∠ई,

અને अब=डई;

∴ △ अबक ≡ △ डईफ. (પ્ર. ૧૧, પ્રકાર ૧)

૧૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. બે કાટખુણ ત્રિકોણ પૈકી એકનો કર્ણ અને એક સાંકડો ખુણો બીજા ત્રિકોણના એજ અવયવોની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

૨. * જો ત્રિકોણના એક ખુણાને દુભાગનારી લીટી સામી બાજુ પર લંબ હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૩. એકરૂપ ત્રિકોણોના સરખા ખુણાનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૪. **अबक** ત્રિકોણમાં **अब=अक**; તો **ब** અને **क** ખુણામાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબ સરખા છે, એ (સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ધર્મોનો ઉપયોગ કર્યા વગર) સિદ્ધ કરો.

૫. * **अबक** ત્રિકોણમાં ∠**ब**=∠**क**; તો **ब** અને **क** શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબ સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૬. * ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંનું કોઈ પણ બિંદુ ખુણાના ભુજોથી સરખે અંતરે હોય છે.

૭. * **अबक** ત્રિકોણના **ब** અને **क** ખુણાને દુભાગનારી **बम** અને **कम** લીટીઓ **म** બિંદુમાં મળે છે. **बक, कअ, अब** પર અનુક્રમે **मय, मर, मल** લંબ દોરેલા છે; તો **मय=मर=मल** એ સિદ્ધ કરો.

૮. **ग** અને **ह** એક બીજીને છેદનારી લીટીઓ છે, અને **य** એક ત્રીજી લીટી છે. **य**માં એવાં બે બિંદુઓ શોધી કાઢો, કે તે **ग** અને **ह**થી સરખે અંતરે હોય. આ વાત ક્યારે અશક્ય હોય છે?

૯. **पचरस** ચતુષ્કોણનો **पर** કર્ણ ∠**प** અને ∠**र**ને દુભાગે છે; તો △**पचर**=△**पसर** એ સિદ્ધ કરો.

૧૦. બે સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેનું **अब** લંબાંતર **क**માં દુભાગેલું છે. **क** બિંદુમાં થઈને જનારી કોઈ પણ લીટી દોરી છે, અને તે સમાંતર લીટીઓને **प** અને **च** બિંદુઓમાં મળતાં સુધી વધારેલી છે. તો **कप=कच** એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. **अबकड** એક ચતુષ્કોણ છે, અને **बड** પર **अई** અને **कफ** લંબ દોરેલા છે. હવે જો **अई, कफ** બરાબર હોય, તો **बड, अक**ને દુભાગે છે એ બતાવી આપો.

૧૨. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે.

૧૩. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે.

૧૪. **अबकड** એક ચતુષ્કોણ છે, અને **अक** કર્ણ ∠**अ**, ∠**क**ને દુભાગે છે; તો **अक**, બીજા કર્ણ **बड**ની સાથે કાટખુણો કરે છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૫. **अब** લીટીનું **क** મધ્યબિંદુ છે, અને આ બિંદુમાં થઈને જનારી કોઈ પણ લીટી દોરી છે; તો **अ** અને **ब**માંથી આ લીટી પર દોરેલા લંબ સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૬. **अब** લીટી પર **अ** અને **ब** છેડા આગળ વિરુદ્ધ દિશાઓમાં લંબો દોરેલા છે; અને **अब**ના મધ્યબિંદુ **क**માં થઈને જનારી લીટી તે લંબોને અનુક્રમે **ड** અને **ई**માં મળે છે; તો **अड=बई**, અને **कड=कई** એ સિદ્ધ કરો.

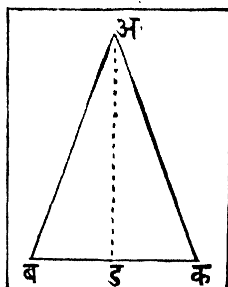
૧૭. એક વર્તુળની **कअ** અને **कब** ત્રિજ્યાઓ એક બીજી પર લંબ છે. **अम** અને **बन** તે વર્તુળના કોઈ પણ વ્યાસ પર દોરેલા લંબ છે; તો **अम=कन** અને **बन=कम** એમ બતાવી આપો.

૧૮. **अबकड** ચતુષ્કોણના **अ,ब,क,ड** ખુણા અનુક્રમે **ईफगह** ચતુષ્કોણના **ई,फ,ग,ह** ખુણાની બરાબર છે; **अब**, **कड** અનુક્રમે **ईफ**, **गह**ની બરાબર છે; અને **अड**, **बक** લીટીઓ એવી છે, કે તે વધારી હોય તો મળે; તો આ ચતુષ્કોણો એકરૂપ છે એમ બતાવો.

૧૯. **अबक** ત્રિકોણનાં **अ,ब,क** શિરોબિંદુઓમાંથી અનુક્રમે **बक**, **कअ**, **अब** બાજુઓને સમાંતર લીટીઓ દોરેલી છે. આ લીટીઓ **ड,ई,फ** બિંદુઓમાં મળે છે; તો એમ બતાવો, કે **डईफ** ત્રિકોણની બાજુઓનાં **अ,ब,क** મધ્ય બિંદુઓ છે.

પ્રમેય ૧૨.

ત્રિકોણની બે બાજુઓ સરખી હોય, તો તે બાજુઓની સામેના ખુણા પણ સરખા હોય છે.



પક્ષ—अबक ત્રિકોણ છે, અને તેમાં अब=अक.

સાધ્ય—∠ब=∠क.

રચના—∠बअक ને દુભાગનારી अड દોરો. ધારો કે તે बक ને डમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—

∵ अबड અને अकड ત્રિકોણોમાં,
अब=अक; (પક્ષ.)
अड બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે;
∠बअड=∠कअड; (રચના.)
∴ △अबड ≡ △अकड. (પ્ર–૧૦.)
∴ ∠ब=∠क.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી (૧) પાયાને દુભાગે છે, (૨) પાયા પર લંબ હોય છે, અને (૩) ત્રિકોણને દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમબાજુ ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો ૬૦° હોય છે.

૧૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની સરખી બાજુઓ પાયા તરફ વધારી હોય તો તેથી થતા બહારના ખુણા સરખા હોય છે.

૨. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુ પાસેનો બહારનો ખુણો પાયા આગળના દરેક ખુણાથી બમણો હોય છે.

૩. **अबक** અને **डबक** આ બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ એકજ પાયા **बक** પર છે, અને પહેલો ત્રિકોણ બીજાની અંદર છે. તો ∠**अबड**=∠**अकड** એ સિદ્ધ કરો.

૪. ઉપલા પ્રશ્નમાંના ત્રિકોણો **बक**ની સામસામી બાજુએ છે એમ ધારીને તેનો જવાબ આપો.

૫. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુને પાયાના મધ્ય-બિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી પાયા પર લંબ હોય છે, એ ક્રમવિરુદ્ધ+ સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરો.

૬. * ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી હોય તો સામ-સામા ખુણા સરખા હોય છે.

૭. * ત્રિકોણની મધ્યગા પાયાથી અર્ધી હોય તો તે ત્રિકોણ કાટખુણ ત્રિકોણ હોય છે.

૮. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુ-માંથી પાયા પર દોરેલો લંબ પાયાને દુભાગે છે.

૯. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી સરખી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૧૦ * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાના છેડામાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૧૧. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી સરખી બાજુઓના મધ્યબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

૧૨. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાના છેડામાંથી સામી બાજુઓના મધ્યબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

૧૩. સમબાજુ ત્રિકોણની મધ્યગાઓ સરખી હોય છે.

+ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા--આનો અર્થ ૧૭૨ મા પાના પર આપ્યો છે.

૧૪. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બિંદુમાં મળતાં સુધી વધારી હોય તો તે સરખી હોય છે.

૧૫. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની સરખી બાજુઓને વધારી તેમને મળતાં સુધી પાયાના છેડામાંથી પાયા પર દોરેલા લંબ વધાર્યા હોય તો તે સરખા થાય છે.

૧૬. **अबक** ત્રિકોણમાં **अब=अक**; ∠**अ** અને ∠**क**ને દુભાગનારી લીટીઓ **म**માં મળે છે; તો **मब**, ∠**ब**ને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

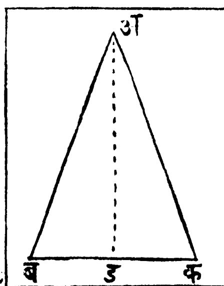
૧૭. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૧૮. **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણની **अब** અને **अक** બાજુઓ પર **बअड**, **कअई** સમબાજુ ત્રિકોણ દોરેલા છે; તો **डअ**,**अई** એકજ સીધી લીટીમાં છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૯. **अब**, એક અર્ધવર્તુળનો બ્યાસ છે; અને **प** પરિધ પર ગમે ત્યાં એક બિંદુ છે; તો **अपब** ખુણો એક કાટખુણો છે એ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૧૩.

ત્રિકોણના બે ખુણા સરખા હોય તો તે ખુણાઓની સામેની બાજુઓ સરખી હોય છે.



પક્ષ—अबक એક ત્રિકોણ છે, તેમાં ∠**ब**=∠**क**.

સાધ્ય—अक=अब.

રચના—बअक ખુણાને દુભાગનારી લીટી દોરો, અને ધારો કે તે **बक**ને **ड**માં મળે છે.

સિદ્ધતા—अबड અને **अकड** ત્રિકોણોમાં—

∠**ब**=∠**क**; (પક્ષ.)

∠**बअड**=∠**कअड**; (રચના).

अड સાધારણ છે;

∴ △**अबड** ≡ △**अकड**. (પ્ર. ૧૧.)

∴ **अब=अक.**

ઉપસિદ્ધાંત—સમકોણ ત્રિકોણ સમબાજુ હોય છે.

૧૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણના બે બહારના ખુણા સરખા હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૨. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ અને પાયો એ ત્રણ મળીને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કરે છે.

૩. **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં **अब=अक** અને **ब** ને **क**માંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ **क्ष**માં મળે છે; તો **क्षब=क्षक** એ સિદ્ધ કરો.

૪. **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં **अब=अक,** અને ∠**ब** તથા ∠**क**ને દુભાગનારી લીટીઓ **म**માં મળે છે; તો **मअ,** ∠**अ**ને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી ખુણાના એક ભુજને સમાંતર એક લીટી દોરી હોય, અને તેને બીજા ભુજને મળતાં સુધી વધારી હોય, તો તેથી બનેલો ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૬. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં **अब=अड**, અને ∠**ब**=∠**ड**; તો **कब=कड** છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭. **अबक** ત્રિકોણના **बक** પાયામાં **प,च** બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે ∠**बअप**=∠**कअच** છે. જો **अप=अच** હોય તો **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૮. **अबकड** ચતુષ્કોણના **अ** અને **ब** ખુણા પહોળા છે અને સરખા પણ છે, અને **अब** ‖ **कड** છે; તો **अड=बक** એ સિદ્ધ કરો.

૯. **अबक** ત્રિકોણમાં ∠**ब**=∠**क**=૨∠**अ**, અને ∠**ब**ને દુભાગનારી લીટી **अक**ને **ड**માં મળે છે; તો **अड**=**बड**=**बक** છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૦. **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણની **बक**, **कअ**, **अब** બાજુઓ પર અનુક્રમે **बकड**, **कअई**, **अबफ** સમબાજુ ત્રિકોણો દોર્યા છે; તો ∠**ड**, ∠**ई**, ∠**फ** એક સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. **अबक** ત્રિકોણની **अब** અને **अक** બાજુઓમાં **ड** અને **ई** બિંદુઓ એવી રીતે લો, કે **डई**, **बक**ને સમાંતર થાય; અને **बड**ની બરાબર થાય.

૧૨. **अबक** કાટખુણ ત્રિકોણના **अक** કર્ણમાં **ड** બિંદુ એવું લીધું છે, કે ∠**डकब**=∠**डबक** છે; તો બતાવી આપો કે **डक=डब=डअ**.

૧૩. * કાટખુણ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુને કર્ણના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી કર્ણના અર્ધ બરાબર હોય છે, એ ઉપલા પ્રશ્નને આધારે સિદ્ધ કરો.

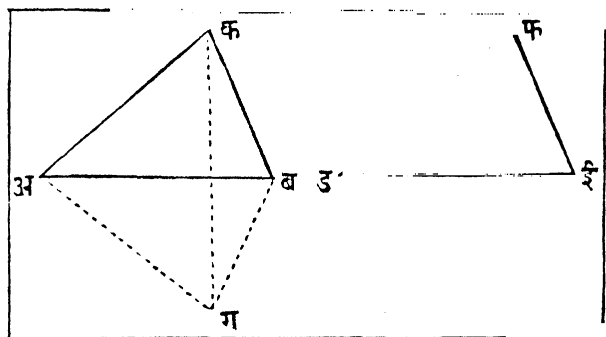
૧૪. * કોઈ પણ ત્રિકોણમાં પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયાના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી શિરોબિંદુ આગળના ખુણાને દુભાગે, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૧૫. **अबक** ત્રિકોણના **बक** પાયામાં (જરૂર પડે તો પાયો વધારીને) એવું એક બિંદુ લો, કે તેનું **अ** અને **क**થી અંતર સરખું હોય.

૧૬. આપેલી લીટીમાં એક **अ** બિંદુ છે, અને તે લીટી-ની બહાર એક **ब** બિંદુ છે; તો આપેલી લીટીમાં એવું એક **क** બિંદુ શોધી કાઢો, કે (૧) **बक** અને **कअ**નો સરવાળો એક આપેલી લીટીથી મોટો થાય; (૨) **बक** અને **कअ**ની બાદબાકી એક આપેલી લીટી બરાબર થાય.

પ્રમેય ૧૪.

જો એક ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ બીજા ત્રિકોણ-ની ત્રણે બાજુની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—**अबक** અને **डईफ** ત્રિકોણોમાં **अब**=**डई**, **अक**=**डफ**, **बक**=**ईफ**.

સાધ્ય—△ **अबक** ≡ △ **डईफ**.

સિદ્ધતા—

ધારો કે સૌથી મોટી બાજુ **अब** છે.

△ **डईफ** ઉપાડીને એવી રીતે મૂકો, કે તેનું **ड** શિરો-બિંદુ **अ** પર પડે, **डई** પાયો **अब**ની દિશામાં પડે, અને **फ** શિરોબિંદુ **क**થી વિરુદ્ધ દિશામાં પડે.

∵ **अब**=**डई**, (પક્ષ.)

∴ **इ, ब** પર પડશે.

ધારો કે **फ** શિરોબિંદુ–**ग** સ્થાનમાં પડે છે.

क, ग સાંધો.

હવે ∵ **अक=डफ**, અને **डफ=अग**, (પક્ષ અને રચના.)

∴ **अक=अग**.

∴ ∠**अकग**=∠**अगक**. (પ્ર. ૧૨.)

અને ∵ **बक=ईफ**, અને **ईफ=बग**, (પક્ષ અને રચના.)

∴ **बक=बग**.

∴ ∠**बकग**=∠**बगक**. (પ્ર. ૧૨.)

∴ ∠**अकग**+ ∠**बकग**=∠**अगक** + ∠**बगक**.

∴ ∠**अकब**=∠**अगब**.

પણ ∠**अगब** એટલે ∠**डफई**જ છે,

∴ ∠**अकब**=∠**डफई**.

હવે ∵ **अबक** અને **डईफ** ત્રિકોણોમાં–

अक=डफ, (પક્ષ.)

कब=फई, (પક્ષ.)

∠**अकब**=∠**डफई**;

∴ △**अबक** ≡ △**डईफ**. (પ્ર–૧૦)

૧૪ મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં **अब=अड**; **कब=कड**; તો **अक** કર્ણ ∠**अ** અને ∠**क**ને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. * ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૩. **अबक** ત્રિકોણની **अब** અને **अक** બાજુઓ સરખી

છે, અને **बक** પર **बकड** ત્રિકોણ એવો દોર્યો છે, કે **बड=कड;** તો **अड**, ∠**बअक**ને દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

૪. **क्षयज्ञ** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના **य** અને **ज्ञ** આ સરખા ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ **म**માં મળે છે, તો બતાવી આપો કે **मक्ष**, ∠**क्ष**ને દુભાગે છે.

૫. **अब** પાયાની સામસામી બાજુએ **अबक** અને **अबड** આ બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તો બતાવી આપો કે **कड**, **अब**ને કાટખુણે દુભાગે છે.

૬. **डअ**ની એકજ બાજુએ **ईडअ** અને **फडअ** આ બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તો બતાવી આપો કે **ईफ** વધારી હોય તો તે **डअ**ને કાટખુણે દુભાગે.

૭. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં **अड=बक** છે, અને **अक** અને **बड** કર્ણો સરખા છે, તો ∠**अकड**=∠**बडक** છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. * સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો તે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણાને દુભાગે છે, અને એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે.

૯. **अमब** અને **कमड** આ સીધી લીટીઓ એક બીજીને છેદે છે, અને **अमकई** તથા **बमडफ** એ સમબાજુ ચતુષ્કોણો છે; તો બતાવી આપો કે **ईफ** લીટી **म**માં થઈને જાય છે, અને **अक**, **बड**ને સમાંતર છે.

૧૦. **अबक**, **अबड** ત્રિકોણો **अब**ની એકજ બાજુએ છે. **अक=बड**, **अड=बक**, અને **अड** તથા **बक**, **म**માં મળે છે; તો **मअक** અને **मबड** ત્રિકોણો એકરૂપ છે એ સિદ્ધ કરો.

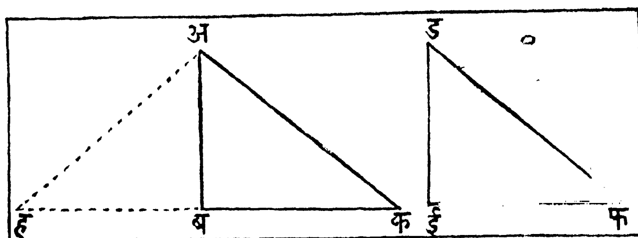
૧૧. * ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગનારા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૧૨. કોઈ પણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે. (ઉપલા

૧૧મા પ્રશ્ન અને ૧૧મા પ્રમેય પરના ૧૯મા પ્રશ્નને આધારે આ સિદ્ધ કરો.)

પ્રમેય ૧૫.

જો કોઈ કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ અનુક્રમે બીજા કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—**अबक** અને **डईफ** બે કાટખુણ ત્રિકોણ છે; તેમના **अक** અને **डफ** કર્ણો સરખા છે, અને **अब=डई** છે.

સાધ્ય—△अबक ≡ △डईफ.

સિદ્ધતા—∵ अब=डई, (પક્ષ.)

∴ △डईफ એવી રીતે મૂકી શકાય કે ड, अ પર પડે; ई, ब પર પડે; અને फ, कની વિરુદ્ધ દિશામાં પડે. ધારો કે फ,ह આગળ પડે છે.

હવે ∵ ∠अबक=૧ કાટખુણો, અને ∠अबह=૧ કાટખુણો; (પક્ષ.)

∴ ∠अबक+∠अबह=૨ કાટખુણા.

∴ हबक એક સીધી લીટી છે. (પ્ર. ૨)

∵ अहक ત્રિકોણમાં अक=अह,

∴ ∠अकब=∠अहब; (પ્ર. ૧૨)

પણ ∠**अहब** એટલે ∠**डफई**જ છે,

∴ ∠**अबक**=∠**डफई**,

હવે **अबक**, **डईफ** ત્રિકોણોમાં—

∠**ब**=∠**ई**; (પક્ષ.)

∠**क**=∠**फ**; (ઉપર સિદ્ધ કર્યો છે.)

अब=**डई**, (પક્ષ).

∴ △**अबक** ≡ △**डईफ**. (પ્ર. ૧૧.)

૧૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * ખુણાના બંને ભુજોથી સરખે અંતરે આવેલું કોઈ પણ બિંદુ તે ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં હોય છે.

૨. **अबक** ત્રિકોણમાં **अब**=**अक**; અને **अड**, **बक** પર લંબ છે; તો △**अबड**≡△**अकड**.

૩. જો ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી બાકીની બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

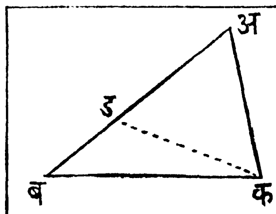
૪. * જો ત્રિકોણના બે ખુણાનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૫. * **अबक** ત્રિકોણના **ब** અને **क** ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ **म**માં મળે છે; તો બતાવી આપો કે **अम**, **अ** ખુણાને દુભાગે છે. (એટલે ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે એ સિદ્ધ કરો.)

૬. **अबक** ત્રિકોણની **अब**, **अक** બાજુઓ વધારવાથી બનેલા બહારના ખુણા **ब** અને **क**ને દુભાગનારી લીટીઓ **म**માં મળે છે; તો **अम**, ∠**बअक**ને દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૧૬.

જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ નાની મોટી હોય, તો મોટી બાજુની સામેનો ખુણો મોટો હોય છે.



પક્ષ—**अबक** એક ત્રિકોણ છે, તેમાં **अब>अक.**

સાધ્ય—∠**क**> ∠**ब.**

રચના—**अब**માંથી **अक** જેવડો **अड** કકડો કાપી કાઢો. **डक** સાંધો.

સિદ્ધતા—

∵ **अडक** ત્રિકોણમાં **अड=अक,** (રચના)

∴ ∠**अडक**=∠**अकड.** (પ્ર. ૧૨)

∵ ∠**अडक** એ **बडक** ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો છે;

∴ ∠**अडक**> ∠**ब.** (પ્ર. ૮, ઉપ. ૩)

પણ ∠**अडक**=∠**अकड.**

∴ ∠**अकड**> ∠**ब.**

અને ∵ ∠**क**> ∠**अकड,**

∴ ∠**क**> ∠**ब.**

૧૬મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ૧૬ મા પ્રમેયની આકૃતિમાં (૧) **कड,** ∠**अ**ને દુ-ભાગનારી લીટી પર લંબ છે; (૨) ∠**डकब**=½ (∠**क**-∠**ब**); અને (૩) ∠**अकड**=½ (∠**ब**+∠**क**); એમ સિદ્ધ કરી બતાવો.

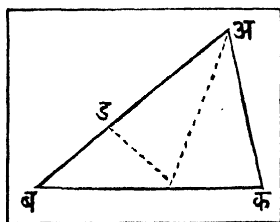
૨. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં **अब** > **अड**; તો ∠**अडब** > ∠**बडक** એ સિદ્ધ કરો.

૩. એક ચતુષ્કોણની **अब, बक, कड, डअ** બાજુઓ જો અનુક્રમે નાની થતી જાય, તો ∠**कडअ** > ∠**कबअ**, એ બતાવી આપો.

૪. * ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુની પાસેના ખુણા હંમેશ સાંકડા હોય છે.

૫. **अबकड** ચતુષ્કોણની સૌથી નાની બાજુ **अब** છે, અને **कड** સૌથી મોટી છે; તો ∠**ब** > ∠**ड** અને ∠**अ** > ∠**क** છે એમ સિદ્ધ કરી બતાવો.

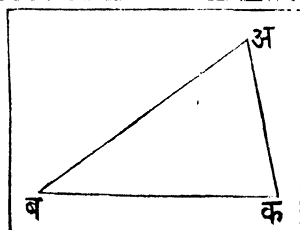
૬. પાસેની આકૃતિમાં આપેલા **अबक** ત્રિકોણનો **अ** ખુણો દુભાગો અને **अक**ની બરાબર **अड** ભાગ કાપી કાઢો; અને એ આકૃતિની મદદથી ૧૬મો પ્રમેય સિદ્ધ કરો.



૭. ત્રિકોણની એક બાજુ બીજીથી મોટી હોય, તો ત્રિકોણના શિરોબિંદુને પાયાના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી, ત્રિકોણની મોટી બાજુ અને પાયાની સામેનો ખુણો દુભાગનારી લીટી એ બેની વચ્ચે હોય છે.

પ્રમેય ૧૭.

ત્રિકોણના બે ખુણા નાના મોટા હોય, તો મોટા ખુણાની સામેની બાજુ (નાના ખુણાની સામેની બાજુ કરતાં) મોટી હોય છે.



પક્ષ—**अबक** ત્રિકોણમાં $\angle$**क** > $\angle$**ब**.

સાધ્ય—**अब** > **अक**.

સિદ્ધતા—

જો **अब, अक**થી મોટી ન હોય, તો તે **अक**ની બરાબર કે તેથી નાની હોવી જોઈએ.

બરાબર હોય તો $\angle$**ब**=$\angle$**क**. (પ્ર. ૧૨.)

નાની હોય તો $\angle$**क** < $\angle$**ब**. (પ્ર. ૧૬.)

પણ આ બંને બાબતો પક્ષની વિરુદ્ધ છે;

∴ **अब** > **अक**.

ઉપસિદ્ધાંત—ત્રિકોણમાંના સૌથી મોટા ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી હોય છે, અને સૌથી નાના ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી નાની હોય છે.

ઉપલા પ્રમેયની સિદ્ધતા એ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતાનું ઉદાહરણ છે.

પ્રમેયના સાધ્યમાંની બાબત ખોટી છે એમ ધારવાથી પક્ષ સાથે અથવા પહેલાં સિદ્ધ કરેલી બાબતો સાથે વિરોધ આવે છે, એમ બતાવવું, તેને **ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા** કહે છે.

ઉપલા પ્રમેયની ક્રમિક સિદ્ધતા નીચેની રચના કરીને આપી શકાય છે:—

अबને છેદનારી **कक्ष** લીટી એવી દોરો, કે $\angle$**बकक्ष**= $\frac{1}{2}$ ($\angle$**क**-$\angle$**ब**) થાય.

પછી **अक्ष**=**अक** છે એમ બતાવી આપો.

૧૭મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ સર્વ બાજુઓથી મોટો હોય છે.

૨. * પહોળખુણ ત્રિકોણમાં પહોળા ખુણાની સામેની બાજુ સૈાથી મોટી હોય છે.

૩. **અબક** ત્રિકોણના પાયાની સામેના **અ** શિરોબિંદુમાંથી **બક** પર **અડ** લંબ દોર્યો હોય, તો બતાવી આપો કે **અબ** > **બડ**, અને **અક** > **કડ** છે; અને આ પરથી (**અબ**+**અક**) > **બક** છે એમ પણ બતાવી આપો.

૪. **અબક** ત્રિકોણના **બ** અને **ક** ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ **ડ**માં મળે છે, અને **અબ** > **અક**; તો **ડબ** > **ડક** એ સિદ્ધ કરો.

૫. **અબક** ત્રિકોણનાં **બ** અને **ક** શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબો **ક્ષ** બિંદુમાં મળે છે. હવે જો **અબ** > **અક** હોય, તો **ક્ષબ** > **ક્ષક** એમ બતાવી આપો.

૬. ત્રિકોણની **અબ**, **અક** બાજુઓ વધારવાથી થતા બહારના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ **ई** બિંદુમાં મળે છે. હવે જો **અબ** > **અક**, તો **ईબ** < **ईક** એ સિદ્ધ કરો.

૭. **અબક** ત્રિકોણની **અબ**, **અક** સરખી બાજુઓ છે; અને તેમને એક લીટી **ક્ષ** અને **ય** બિંદુઓમાં છેદે છે. **બક** પાયાને **ક** તરફ વધાર્યો હોય, તો તેને પણ તે લીટી મળે છે; તો બતાવો કે **અય** > **અક્ષ**.

૮. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો વધારીને તેમાંના કોઈ પણ બિંદુ સુધી પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી લીટી દરેક સરખી બાજુથી મોટી હોય છે.

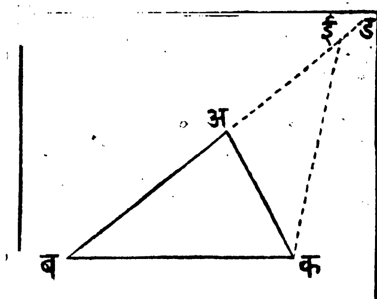
૯. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયાના કોઈ પણ બિંદુ સુધી દોરેલી લીટી દરેક સરખી બાજુથી નાની હોય છે.

૧૦. * ત્રિકોણના કોઈ પણ ખુણાને દુભાગનારી લીટીથી સામી બાજુના જે બે ભાગ થાય છે, તેમાંનો દરેક ભાગ તેની પાસેની ત્રિકોણની બાજુથી નાનો હોય છે.

૧૧. * આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર ફક્ત બેજ સરખી લીટીઓ દોરી શકાય છે.

પ્રમેય ૧૮.

ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે.



પક્ષ—अबक એક ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય—(૧) (बअ+अक) > बक;

(૨) (कब+बअ) > कअ; અને

(૩) (अक+कब) > अब.

રચના—बअने ड સુધી વધારો. अडમાંથી अक જેવડો अई કકડો કાપી કાઢો. कई સાંધો.

સિદ્ધતા—

∵ अईक ત્રિકોણમાં अई=अक, (રચના.)

∴ ∠अकई=∠अईक. (પ્ર. ૧૨.)

પણ ∠बकई> ∠अकई,

∴ ∠बकई > ∠अईक.

હવે ईबक ત્રિકોણમાં ∵ ∠बकई > ∠बईक,

∴ बई > बक. (પ્ર. ૧૭)

એટલે (बअ+अई) > बक.

પણ अई=अक, (રચના.)

∴ (बअ+अक) > बक.

એજ રીતે (कब+बअ) > कअ, અને (अक+कब) > अब, એ સિદ્ધ કરી શકાય.

ઉપસિદ્ધાંત—કોઈ પણ ત્રિકોણની બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુથી ઓછી હોય છે.

સિદ્ધતા—

(अब+अक) > बक. (પ્ર. ૧૮.)

દરેક બાજુમાંથી अक બાદ કરો.

∴ अब > (बक–अक).

૧૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. अ ખુણો દુભાગીને ૧૮મો પ્રમેય સિદ્ધ કરો.

૨. ચતુષ્કોણની કોઇ પણ ત્રણ બાજુનો સરવાળો ચોથા બાજુથી વધારે હોય છે.

૩. બહુકોણની કોઈ પણ એક બાજુ બાકીની બધી બાજુઓના સરવાળા કરતાં ઓછી હોય છે.

૪. * ચતુષ્કોણના કર્ણોનો સરવાળો તેની પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે.

૫. * કોઈ પણ બિંદુમાંથી ત્રિકોણનાં ત્રણે શિરોબિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૬. કોઈ પણ બિંદુમાંથી બહુકોણનાં સર્વે શિરોબિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓનો સરવાળો તે બહુકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૭. अबक ત્રિકોણમાં ड બિંદુ એવું લીધું છે, કે अड=

अब છે; **बअड** ખુણાને દુભાગનારી લીટી **बक**ને **ई**માં મળે છે; તો **बई=ईड** છે એમ બતાવી આપો, અને તે ઉપરથી **बक** > **कड** છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. **अबक** ત્રિકોણની **अक** બાજુમાં ગમે ત્યાં એક **ड** બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે **बअ+अक** > **बड+डक.**

૯. **अबक** ત્રિકોણમાં ગમે ત્યાં એક **ड** બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે **बअ+अक** > **बड+डक.**

૧૦. * વર્તુળની કોઈ પણ જ્યા વ્યાસથી નાની હોય છે.

૧૧. **अक** પાયા પર **अबक** ત્રિકોણ અને **अपचक** ચતુષ્કોણ છે; **प,च** બિંદુઓ ત્રિકોણની અંદર છે; તો ત્રિકોણની પરિમિતિ ચતુષ્કોણની પરિમિતિથી મોટી છે એમ બતાવી આપો.

૧૨. ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા અને પાયાનું અર્ધ એ બેનો સરવાળો, પાયાની સામેનો ખુણો કરનારી બે બાજુના સરવાળાના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૩. * ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો, તે બે બાજુઓના મેલનબિંદુમાંથી દોરેલી મધ્યગાની બમણાઈ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૪. * કોઈ પણ ત્રિકોણની ત્રણ મધ્યગાઓનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે.

૧૫. * કોઈ પણ ત્રિકોણની પરિમતિ ત્રણે મધ્યગાઓના સરવાળાની બમણાઈ કરતાં ઓછી હોય છે.

૧૬. **अबकड** ચતુષ્કોણની અંદર **म** એક બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે (**मअ+मब+मक+मड**) >(**अक+बड.**)

૧૭. * ત્રિકોણમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે ત્રિકોણના ત્રણે શિરોબિંદુઓ સુધી દોરેલી સીધી લીટીઓનો સરવાળો (૧) ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે; પણ (૨) પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે, એમ બતાવી આપો.

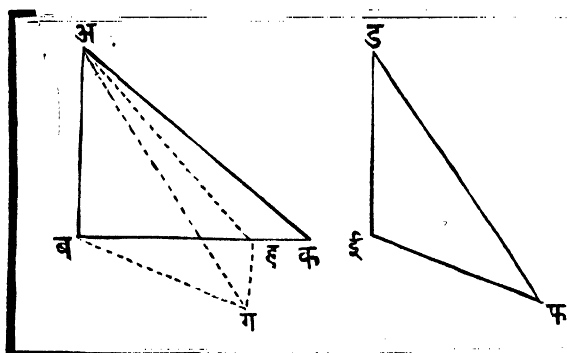
૧૮. ચતુષ્કોણના કર્ણોનો સરવાળો ચતુષ્કોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૯. **अबक** ત્રિકોણમાં **बक**નું મધ્યબિંદુ **ड** છે; જો **अड** <**बड**, તો ∠**अ** પહોળો ખુણો છે એ બતાવી આપો.

૨૦. જો એક ત્રિકોણ બીજા ત્રિકોણની અંદર પુરેપુરી રીતે મૂકી શકાતો હોય, તો પહેલાની પરિમિતિ બીજાની પરિમિતિ કરતાં ઓછી હોય છે.

પ્રમેય ૧૯.

બે ત્રિકોણ પૈકી એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ તે બાજુઓની વચ્ચેના ખુણા નાના મોટા હોય; તો જે ત્રિકોણમાંનો ખુણો મોટો હોય, તે ત્રિકોણનો પાયો નાના ખુણાવાળા ત્રિકોણના પાયા કરતાં મોટો હોય છે.



પક્ષ—**अबक** અને **डईफ** એ બે ત્રિકોણમાં **अब**=**डई**, **अक**=**डफ**, અને ∠**अ** > ∠**ड**.

સાધ્ય—**बक** > **ईफ**.

સિદ્ધતા—

∵ **डई=अब,**

∴ **डई, अब** પર બરાબર આવી રહેશે.

डईफ ત્રિકોણ એવી રીતે મૂકો, કે **ड** અને **ई** બિંદુઓ **अ** અને **ब** પર પડે; અને **अब**ની જે બાજુએ **क** શિરોબિંદુ છે તેજ બાજુએ **फ** શિરોબિંદુ પડે. ધારો કે **फ, ग** આગળ પડે છે.

હવે ∵ ∠**बअक** > ∠**बअग,** (પક્ષ.)

∴ **अग (डफ), अब** અને **अक**ની વચ્ચે પડે છે.

∠**बअक**માંથી ∠**बअग** (∠**ईडफ**) બાદ જતાં બાકી રહેલા ∠**कअग**ને દુભાગો, અને દુભાગનારી લીટીને **ह** બિંદુમાં **बक**ને મળવા દો. **हग** સાંધો.

∵ **अगह** અને **अकह** ત્રિકોણોમાં—

अग=अक, (પક્ષ.)

अह બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે,

અને ∠**गअह**=∠**कअह;** (રચના.)

∴ એ ત્રિકોણ એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦)

∴ **हग=हक.**

આ દરેકમાં **बह** ઉમેરો.

∴ **बह+हग=बह+हक** (એટલે **बक**ની બરાબર.)

હવે **बहग** ત્રિકોણમાં—

∵ **बह+हग** > **बग;** (પ્ર. ૧૮)

અને **बह+हग=बक;**

∴ **बक** > **बग.**

પણ **बग** એટલે **ईफ**જ;

∴ **बक** > **ईफ.**

૧૯મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. **अबकड** એક ચતુષ્કોણ છે, તેમાં **अड=बक,** અને

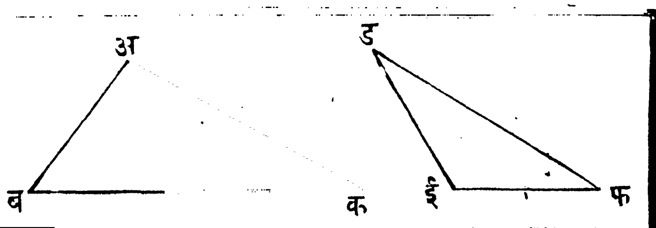
∠अडक > ∠बकड; તો બતાવી આપો કે अक>बड.

૨. अबक ત્રિકોણની अब અને अक બાજુઓને અનુક્રમે ड અને ई સુધી વધારીને बड=कई કરેલી છે. હવે જો अब> अक હોય, તો બતાવો કે कड>बई.

૩. अबक ત્રિકોણની बअ અને कअ બાજુઓને વધારીને बड અને कई સરખી કરી છે. હવે જો अब>अक હોય, તો બતાવી આપો કે बई>कड.

પ્રમેય ૨૦.

બે ત્રિકોણ પૈકી એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પરંતુ તેમના પાયા નાના મોટા હોય, તો જે ત્રિકોણનો પાયો મોટો હોય તેનો તે પાયાની સામેનો ખુણો, જેનો પાયો નાનો છે તેના પાયાની સામેના ખુણા કરતાં મોટો છે.



પક્ષ—अबक અને डईफ ત્રિકોણોમાં अब=डई, अक=डफ, અને बक> ईफ.

સાધ્ય—∠अ > ∠ड.

સિદ્ધતા—

જો ∠अ > ∠ड ન હોય, તો ∠अ=∠ड હોવો જોઈએ, અથવા ∠अ <∠ड હોવો જોઈએ.

હવે $\angle$ अ=$\angle$ ड હોય, તો

बक=ईफ, (પ્ર. ૧૦)

અને $\angle$ अ <$\angle$ ड હોય, તો

बक <ईफ. (પ્ર. ૧૯)

પણ આ બંને બાબતો પક્ષથી વિરુદ્ધ છે,

એટલે $\angle$ अ, $\angle$ डની બરાબર પણ નથી અને તેથી નાનો પણ નથી.

∴ $\angle$ अ> $\angle$ ड.

૨૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. **अबक** ત્રિકોણમાં **अब** > **अक**; **बक**, **ड**માં દુભાગેલી છે; તો **अडक** સાંકડો ખુણો છે એમ બતાવી આપો.

૨. **अबक** ત્રિકોણની **बक** બાજુનું **ड** મધ્યબિંદુ છે. **अड**માં ગમે ત્યાં **ई** બિંદુ લીધેલું છે; તો એમ બતાવો કે જો **अब** > **अक** હોય, તો **ईब** > **ईक** છે.

૩. **अबक** ત્રિકોણની **बअ**, **कअ** બાજુઓમાંથી **बड**, **कई** સરખા કકડા કાપી કાઢ્યા છે. હવે જો **बई** > **कड** હોય, તો **अब** > **अक** છે એમ બતાવી આપો.

૪. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં **अड=बक**. હવે એમ બતાવી આપો કે જો

(૧) **अक**>**बड** હોય, તો $\angle$ **अडक**>$\angle$ **बकड**;

(૨) **अब** <**कड** હોય, તો $\angle$ **अकब** <$\angle$ **डअक**;

(૩) $\angle$ **अडक**> $\angle$ **बकड** હોય, તો $\angle$ **अबक**> $\angle$ **बअड**.

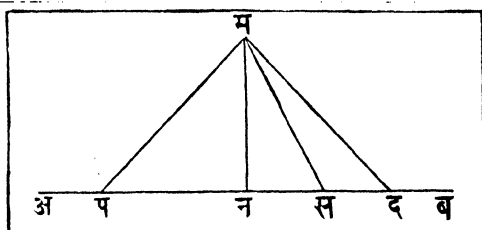
પ્રમેય ૨૧.

આપેલી લીટીની બહારના બિંદુમાંથી તે લીટી પર જે લીટીઓ દોરી શકાય તે પૈકી—

(૧) લંબ સૌથી નાની લીટી હોય છે,

(૨) લંબની સાથે સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓ સરખી હોય છે, અને

(૩) લંબની સાથે મોટા ખુણો કરનારી લીટી, નાનો ખુણો કરનારી લીટી કરતાં મોટી હોય છે.



पक्ष—**अब** આપેલી લીટી છે. તે લીટીની બહાર **म** આપેલું બિંદુ છે.

(૧) **मन**, **अब** પર લંબ છે; અને **मप**, **अब**ને **प**માં મળનારી લીટી છે. (૨) ∠**नमप**=∠**नमद**. (૩) ∠**नमप** > ∠**नमस**.

સાધ્ય—(૧) **मन** સૌથી નાની લીટી છે.

સિદ્ધતા—

∵ **मपन** ત્રિકોણની **पन** બાજુ **ब** સુધી વધારી છે,

∴ ∠**मनब** > ∠**मपन**. (પ્ર. ૮, ઉ. સિ. ૩)

અને ∠**मनब**=૧ કાટખુણો (અને તેટલા માટે)=∠**मनप**,

∴ ∠**मनप** > ∠**मपन**.

∴ **मप** > **मन**. (પ્ર. ૧૭)

એજ રીતે **म**માંથી **अब** સુધી દોરેલી બીજી કોઈ પણ લીટી કરતાં **मन** નાની છે એમ સિદ્ધ કરી શકાશે.

સાધ્ય—(૨) **मप**=**मद**.

સિદ્ધતા—

∵ **મપન, મદન** ત્રિકોણોમાં

∠**મનપ**=∠**મનદ**, } (પક્ષ.)
∠**નમપ**=∠**નમદ**, }

મન બાજુ બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે;

∴ **મપ=મદ.** (પ્ર. ૧૧)

સાધ્ય—(૩) **મપ > મસ.**

સિદ્ધતા—

∵ **મદસ** ત્રિકોણની **દસ** બાજુ **પ** સુધી વધારી છે,

∴ ∠**મસપ** > ∠**મદપ.** (પ્ર. ૮, ઉ. ૩)

અને ∵ **મપ=મદ,**

∴ ∠**મદપ**=∠**મપદ** (=∠**મપસ.**) (પ્ર. ૧૨)

∴ ∠**મસપ** > ∠**મપસ;**

∴ **મપ > મસ.** (પ્ર. ૧૭)

ઉપસિદ્ધાંત ૧—લીટીની બહારના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે લીટી સુધી બેજ સરખી લીટીઓ દોરી શકાય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—કોઈ પણ બિંદુમાંથી કોઈ પણ લીટી સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે પૈકી સૌથી નાની લીટી તે લીટી પર લંબ હોય છે.

૨૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તે પૈકી એક બાજુની સામેનો ખુણો—એટલા અવયવો બીજા ત્રિકોણના એમને મળતા અવયવોની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે; અથવા તે ત્રિકોણોની સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

૨. ઉપલા પ્રશ્નમાં એમ બતાવી આપો, કે આપેલા સરખા ખુણા પહોળા હોય, તો બંને ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

પ્રમેય ૨૨.

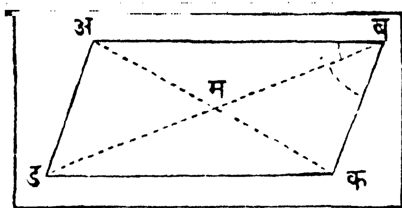
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં—

(૧) સામસામા ખુણા સરખા હોય છે;

(૨) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે;

(૩) દરેક કર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે; અને

(૪) બંને કર્ણ એકબીજાને દુભાગે છે.



પક્ષ—अबकड સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. **अक,बड** તેના કર્ણ છે.

સાધ્ય—(૧) ∠**अ**=∠**क**, અને ∠**ब**=∠**ड**.

(૨) **अड=बक** અને **अब=डक**.

(૩) **अक** અને **बड** કર્ણો **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે;

(૪) **अक** અને **बड** કર્ણો એક બીજાને **म**માં દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—(૧)

∵ **अड ∥ बक**, અને તેમને **बड** મળે છે,

∴ ∠**कबड**=વ્યુત્ક્રમ ∠**अडब**. (પ્ર. ૬.)

તેમજ ∵ **अब ∥ डक**, અને **डब** તેમને મળે છે,

∴ ∠**अबड**=વ્યુત્ક્રમ ∠**कडब**. (પ્ર. ૬.)

∴ ∠**अबड**+∠**कबड**=∠**कडब**+∠**अडब**.

∴ ∠**ड**=∠**ब**.

એજ રીતે ∠**अ**=∠**क** છે એમ બતાવી શકાશે.

(૨)

∵ **अबड, कडब** ત્રિકોણોમાં—

∠**अडब**=∠**कबड**;

∠**अबड**=∠**कडब**;

અને **बड** બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે;

∴ △ **अबड** ≡ △**कडब**. (પ્ર. ૧૧.)

∴ **अड=बक**, અને **अब=डक**.

(૩)

∵ △**अबड** ≡ △**कडब**, (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

∴ **बड** કર્ણથી **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થયા છે. તેમજ △**अडक** ≡ △**अबक** એમ બતાવી શકાશે.

(૪)

∵ △**मअड** અને △**मकब**માં

∠**अडम**=∠**कबम**, (પ્ર. ૬.)

∠**अमड**=∠**कमब**, (પ્ર. ૩.)

अड=बक,

∴ △**अमड** ≡ △**बमक**. (પ્ર. ૧૧.)

∴ **मअ=मक**, અને **मड=मब**.

એટલે, **अक** અને **बड** કર્ણો એક બીજાને **म**માં દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર (લંબાંતર) બધે ઠેકાણે સરખું હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો બાકીના બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસ-

પાસેની કોઈ પણ બે બાજુઓ સરખી હોય, તો સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે.

૨૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજા સાથે કાટખુણો કરે છે.

૨. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ સમાંતર હોય છે.

૩. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણોના છેદનબિંદુમાંથી સામસામી બાજુ સુધી દોરેલી કોઈ પણ લીટીના તે બિંદુમાં સરખા ભાગ થાય છે.

૪. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં **बक=अड** છે, પણ તેઓ સમાંતર નથી; અને **अब** ॥ **डक** છે; ∠**क**=∠**ड** એમ બતાવી આપો.

૫. ઉપલા પ્રશ્નની આકૃતિમાં જો **ई** અને **फ** અનુક્રમે **अब** અને **कड**નાં મધ્યબિંદુ હોય, તો **ईफ, अब** પર લંબ છે એમ બતાવી આપો.

૬. * સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો દરેક કર્ણ સામાં શિરો-બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૭. એક ચતુષ્કોણની બે બાજુઓ સમાંતર છે, અને બીજી બે બાજુઓ સરખી છે; તો તેમાંનો કોઈ પણ ખુણો સામા ખુણાની બરાબર છે અથવા તેનો ન્યુનતાપૂરક છે એમ બતાવી આપો.

૮. * જે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો સરખા હોય છે તે કાટખુણ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૯. જે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજા પર લંબ હોય છે, તેની સર્વ બાજુઓ સરખી હોય છે.

૧૦. જો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો સમાન હોઈને એક બીજા પર લંબ હોય, તો તે ચોરસ હોય છે.

૧૧. **अब** પાયા પર અને તેની વિરુદ્ધ બાજુએ **अबकड**, **अबईफ** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એવા દોર્યા, કે પહેલાની **अड** બાજુ બીજાના **अई** કર્ણ બરાબર છે, અને પહેલાનો **अक** કર્ણ બીજાની **अफ** બાજુ બરાબર છે; તો એમ સિદ્ધ કરો કે:—

(૧) **क**, **अ**, **फ** બિંદુઓ } એકજ સીધી લીટીમાં છે.
અને (૨) **ड**, **अ**, **ई** બિંદુઓ }

૧૨. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના **अक** કર્ણમાં **ई** બિંદુ એવું લીધું છે, કે **ईब=ईड** છે; તો **ई**, **अक**નું મધ્યબિંદુ છે એમ બતાવી આપો. આનો કોઈ અપવાદ હોય તો કહો.

૧૩. **अबक** ત્રિકોણની **बक** બાજુમાં **ई** અને **फ** બે બિંદુઓ લો. **अब**માં **प** બિંદુ અને **अक**માં **द** બિંદુ કેવી રીતે લીધાં હોય, તો **पद** લીટી **ईफ**ની બરાબર અને તેને સમાંતર થાય ?

૧૪. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયામાંના ગમે તે બિંદુમાંથી સરખી બાજુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો, પાયાના એક છેડામાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબની બરાબર હોય છે.

૧૫. સમબાજુ ત્રિકોણની અંદરના ગમે તે બિંદુમાંથી ત્રણે બાજુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો, તે ત્રિકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબની બરાબર હોય છે.

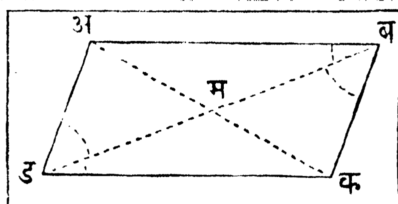
પ્રમેય ૨૩.

કોઈ પણ ચતુષ્કોણમાં જો—

(૧) સામસામી બાજુઓ પૈકી, એક જોડમાંની બે લીટીઓ સરખી અને સમાંતર હોય, અથવા

(૨) સામસામી બાજુઓની દરેક જોડમાંની બાજુઓ સરખી હોય, અથવા

(૩) સામસામા ખુણા સરખા હોય, અથવા
(૪) કર્ણો એક બીજાને દુભાગતા હોય,
તો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાજુ હોય છે.



(૧)

પક્ષ—अबकड ચતુષ્કોણમાં **अब, डक** સરખી અને સમાંતર છે.

સાધ્ય—अबकड સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

રચના—अ,क સાંધો.

સિદ્ધતા—

હવે ∵ **अब ∥ डक,** (પક્ષ.)
અને તેમને **अक** મળે છે,
∴ ∠**बअक**=વ્યુત્ક્રમ ∠**अकड**. (પ્ર. ૬.)
હવે ∵ △**अबक,** અને △**कडअ**માં,
अब=कड; (પક્ષ.)
अक સાધારણ છે;
∠**बअक**=∠**अकड;**
∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦.)
∴ ∠**अकब**=∠**कअड**.
અને ∵ આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે,
∴ **बक ∥ अड**. (પ્ર. ૪)
∴ **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(૨)

પક્ષ—अब=कड, અને बक=अड.

સાધ્ય—अबकड સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

∵ △ अबक, △ कडअ માં

अब=कड, (પક્ષ.)

बक=डअ, ,,

अक સાધારણ છે;

∴ △ अबक ≡ △ कडअ. (પ્ર. ૧૪)

∴ ∠बअक=∠डकअ, અને ∠बकअ=∠कअड.

∴ अब ∥ डक, અને बक ∥ अड. (પ્ર. ૪)

∴ अबकड સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(૩)

પક્ષ—∠अ=∠क, અને ∠ब=∠ड.

સાધ્ય—अबकड સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

∵ ∠अ=∠क, અને ∠ब=∠ड, (પક્ષ.)

∴ ∠अ+∠ब=∠क+∠ड;

એટલે ∠अ + ∠ब એ સરવાળો ∠अ + ∠ब + ∠क + ∠ड નું અર્ધ છે.

અને ∵ अबकड એક ચતુષ્કોણ છે,

∴ ∠अ+∠ब+∠क+∠ड=૪ કાટખુણા,

(પ્ર. ૮, ઉ. ૬.)

∴ ∠अ+∠ब=૨ કાટખુણા,

∴ अड ∥ बक. (પ્ર. ૫)

એજ પ્રમાણે अब ∥ डक છે એમ બતાવી શકાશે.

∴ अबकड સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(૪)

પક્ષ—अक, बड એક બીજાને **म**માં દુભાગે છે.

સાધ્ય—अबकड સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

∵ △ **अमड** અને △ **कमब** માં—

अम=कम, (પક્ષ.)

डम=बम, ,,

∠**अमड** = ∠**कमब,** (પ્ર. ૩)

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦)

∴ **अड=बक**; અને

∵ ∠**अडम**=વ્યુત્ક્રમ ∠**कबम,**

∴ **अड** ॥ **बक.** (પ્ર. ૪)

∴ **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

(પ્ર. ૨૩, પ્રકાર ૧)

૨૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * સરખી ઉંચાઇના ત્રિકોણો અથવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો, સમાંતર લીટીઓની એકજ જોડ વચ્ચે મૂકી શકાય છે.

૨. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં ∠**अ**, ∠**ब**, ∠**ड** અનુક્રમે ૬૦°, ૧૨૦°, ૧૨૦°ના છે; તો ∠**क** કેવડો? **अबकड** કઈ જાતનો ચતુષ્કોણ છે?

૩. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી સીધી લીટી બીજી બે બાજુઓને સમાંતર હોય છે.

૪. * કાટખુણુ ચતુષ્કોણના કર્ણો સરખા હોય છે.

૫. * ચોરસના અને તેમજ સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજા પર લંબ હોય છે.

૬. * સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો તેના ખુણાઓને દુભાગે છે.

૭. * ચતુષ્કોણના કર્ણો સમાન હોઈને જો તે એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ ચોરસ હોય છે.

૮. * જો ચતુષ્કોણના કર્ણો નાના મોટા હોઈને એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમબાજુ હોય છે.

૯. (૧) કાટખુણ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને દુભાગે છે. (૨) સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજા પર લંબ હોય છે, એક બીજાને દુભાગે છે, અને તે સમબાજુ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને પણ દુભાગે છે. (૩) ચોરસના કર્ણો સરખા હોય છે, તે એક બીજા પર લંબ હોય છે, એક બીજાને દુભાગે છે, અને તે ચોરસના ખુણાને પણ દુભાગે છે.

૧૦. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને **अब**, **कड** બાજુઓ **क्ष** અને **य** બિંદુમાં દુભાગેલી છે; તો બતાવો કે **बक्षडय** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

૧૧. * જે ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુઓ સરખી અને એક ખુણો કાટખુણો હોય છે, તે ચોરસ હોય છે.

૧૨. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં ∠**अ**=∠**ब** અને ∠**क**=∠**ड** છે; તો આ ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓની એક જોડ-માંની બાજુઓ સરખી છે, અને બીજી જોડમાંની બાજુઓ સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૧૩. **अबकड** એક ચતુષ્કોણ છે; **बकडप**, **कडअद**, **डअबर**, અને **अबकस** એ ચાર સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો છે; તો **अप**, **बद**, **कर**, **डस** સરખી અને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

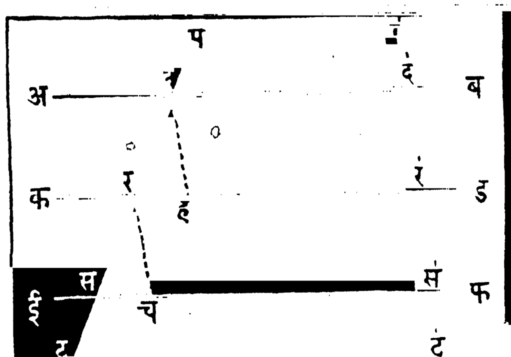
૧૪. જો ચતુષ્કોણના દરેક શિરોબિંદુથી બીજાં શિરો-બિંદુઓ સુધીનાં અંતરોનો સરવાળો સરખો હોય, તો તે ચતુષ્કોણ કાટખુણ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૧૫. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં ગમે ત્યાં એક **म** બિંદુ છે. **मअइब**, **मबफक**, **मकगड**,

મડહઅ આ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોર્યા હોય, તો **ઈફગહ** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે, અને તે **અબકડ**થી બમણો છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૨૪.

જો ત્રણ અથવા ત્રણથી વધારે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદનારી એક લીટીના તે સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના ગાળાઓ સરખા હોય, તો તે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી બીજી કોઈ પણ લીટીના તેવા ગાળાઓ પણ સરખા હોય છે.



પક્ષ—અબ, કડ, ઈફ સમાંતર સીધી લીટીઓ છે; તેમને **પટ** સીધી લીટી અનુક્રમે **દ,ર,સ**માં છેદે છે; અને **દર=રસ.** બીજી કોઈ પણ **પ'ટ'** સીધી લીટી આ સમાંતર સીધી લીટીઓને **દ',ર',સ'**માં છેદે છે.

સાધ્ય—દ'ર'=ર'સ'.

રચના—પ'ટ'ને સમાંતર **દહ, રચ** દોરો, અને ધારો કે તે **કડ, ઈફ**ને **હ** અને **ચ**માં મળે છે.

સિદ્ધતા—

હવે ∵ कड ∥ ईफ, (પક્ષ.)

∴ ∠दरह=સંગત ∠रसच. (પ્ર. ૬.)

∵ दह, रच બંને ∥ प'र',

∴ दह ∥ रच. (પ્ર. ૭.)

∵ दरस તેમને છેદે છે,

∴ रदह=સંગત ∠सरच. (પ્ર. ૬.)

∵ △दरह અને △रसचમાં—

∠दरह=∠रसच;

∠रदह=∠सरच;

दर=रस; (પક્ષ.)

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

∴ दह=रच.

दह ∥ द'र', અને दद' ∥ हर',

∴ दहर'द' સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

તેમજ रचस'र' પણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

∴ दह=द'र' અને रच=र'स'. (પ્ર. ૨૨.)

પણ दह=रच,

∴ द'र'=र'स'.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—જો ત્રિકોણની કોઈ બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી પાયાને સમાંતર લીટી દોરી હોય, તો તે બીજી બાજુને દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુને (૧) સમાંતર હોય છે અને (૨) તેનાથી અર્ધી હોય છે.

૨૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી-

એથી તે ત્રિકોણના જે ચાર ત્રિકોણ થાય છે, તે એક-રૂપ હોય છે.

૨. **अबक** ત્રિકોણની **अब** અને **अक** બાજુઓમાં અનુક્રમે **ड** અને **ई** બિંદુએા એવાં લીધાં છે, કે **अड**=¼ **अब**, અને **अई**=¼ **अक**; તો **डई**,**बक**નો એક ચતુર્થાંશ છે અને તેને સમાંતર છે એ બતાવી આપો.

૩. * ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધવાથી બનેલી આકૃતિ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે, એ બતાવી આપો.

૪. * ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ એક બીજીને દુભાગે છે.

૫. ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ, અને તેના કર્ણોનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી, એક બિંદુમાં મળે છે અને તેમાંજ દુભાગાય છે.

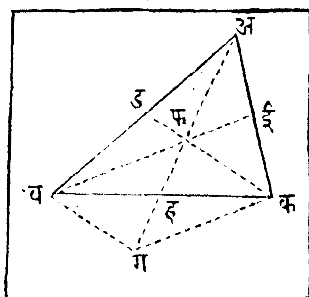
૬. * કાટખુણ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી મધ્યગા કર્ણના અર્ધ જેટલી હોય છે.

૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુને તેની સામી બાજુનાં શિરોબિંદુઓની સાથે સાંધનારી બે લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો જો કાટખુણો હોય, તો તે સમાંતર-બાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુ બીજીથી બમણી હોય છે.

૮. ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓનાં સ્થાન આપેલાં છે, તો તે ત્રિકોણ દોરો.

પ્રમેય ૨૫.

ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે, અને આ બિંદુથી મધ્યગાઓના જે બે ભાગ થાય છે, તેમાંથી શિરોબિંદુ તરફનો ભાગ બીજા ભાગથી બમણો હોય છે.



પક્ષ—अबक એક ત્રિકોણ છે, અને તેની **बइ** અને **कड** મધ્યગા એક બીજીને **फ** બિંદુમાં છેદે છે.

સાધ્ય—(૧) **अह** મધ્યગા **फ** બિંદુમાં થઈને જાય છે;

(૨) **अफ=२फह; बफ=२ फई; कफ=२ फड.**

સિદ્ધતા—

(૧) (**अ,फ** બિંદુઓમાં થઈને જનારી સીધી લીટી મધ્યગા છે એમ સિદ્ધ થાય, તો ત્રણે મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં થઈને જાય છે એ સિદ્ધ થાય.)

રચના—अ,फ સાંધો. **अफ** લીટીને વધારીને તેનો વધારેલો **फग** ભાગ **अफ**ની બરાબર કરો. **बग** અને **कग** સાંધો.

∵ △ **अबग**ની **अब** અને **अग** બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ અનુક્રમે **ड** અને **फ** છે; (પક્ષ અને રચના)

∴ **डफ, बग**ને સમાંતર છે અને **बग**ના અર્ધ બરાબર છે. (પ્ર. ૨૪, ઉ. સિ. ૨)

એજ પ્રમાણે **अकग** ત્રિકોણની **अग** અને **अक** બાજુઓનાં અનુક્રમે **फ** અને **ई** મધ્યબિંદુઓ છે; (રચના અને પક્ષ.)

∴ **फई, गक**ને સમાંતર છે અને **गक**ના અર્ધ બરાબર છે. (પ્ર. ૨૪, ઉ. સિ. ૨)

હવે ∵ **डफ ॥ बग,**

અને **बई ॥ गक,**

∴ **बगकफ** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

અને ∵ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે;

∴ **बक** અને **फग**નું **ह** મધ્યબિંદુ છે.

હવે ∵ **ह**, **बक**નું મધ્યબિંદુ છે,

∴ **अफह** મધ્યગા છે, અને તે **फ**માં થઈને જાય છે એ સ્પષ્ટ છે.

∴ ત્રિકોણની ત્રણે મધ્યગા એકજ બિંદુમાં મળે છે એ સ્પષ્ટ થાય છે.

(૨)

∵ **फह=हग**,

∴ **फग**=૨ **फह**.

પણ **फग=अफ**, (રચના.)

∴ **अफ**=૨ **फह**.

એજ પ્રમાણે **बफ**=૨ **फई**, અને **कफ**=૨ **फड**, એ સિદ્ધ કરી શકાય.

૨૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી એક કર્ણને સમાંતર હોય છે, અને આ લીટીના છેડાઓને સામા શિરોબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટીઓથી તે કર્ણના ત્રણ સરખા ભાગ થાય છે.

૨. એક સીધી લીટીના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૩. જો ત્રિકોણની બે મધ્યગા સરખી હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે; અને જો ત્રણે મધ્યગા સરખી હોય, તો તે ત્રિકોણ સમબાજુ હોય છે.

૪. ત્રિકોણની ત્રણે મધ્યગાનો સરવાળો પરિમિતિના ત્રણ ચતુર્થાંશ કરતાં વધારે હોય છે.



નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧.

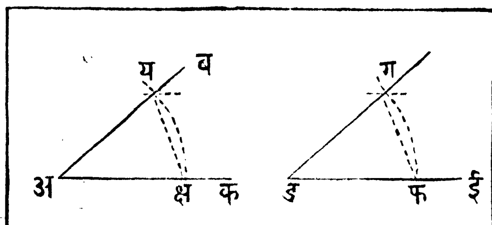


ખંડ ૩.

(કૃત્યો.)

કૃત્ય ૧.

આપેલી લીટીમાંના આપેલા બિંદુ આગળ આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કરવો.



પક્ષ—**डई** આપેલી લીટી છે. **ड** આપેલું બિંદુ છે. **बअक** આપેલો ખુણો છે.

સાધ્ય—આપેલા ∠**बअक** જેવડો ∠**ईडग** કરવો.

રચના—**अ** મધ્યબિંદુ ધારીને ગમે તે ત્રિજ્યાએ એક ક્રૉસ દોરો. તેને, **अब** અને **अक**ને અનુક્રમે **य** અને **क्ष**માં છેદવા દો. **ड** મધ્યબિંદુ ધારીને પહેલાં જેટલીજ ત્રિજ્યાએ ક્રૉસ દોરો. તે **डई**ને અથવા **डई**ના વધારેલા ભાગને **फ**માં છેદે છે, એમ ધારો. **फ** મધ્યબિંદુ લઈને **क्षय** (સીધી લીટીની) લંબાઈ જેટલી ત્રિજ્યાએ એક ક્રૉસ દોરો. તેને **फ** ક્રૉસને **ग**માં છેદવા દો. **डग** સાંધો.

फडग માગેલો ખુણો થશે.

સિદ્ધતા—

(**फग** અને **क्षय** સાંધો.)

∵ **अक्षय, डफग** ત્રિકોણોમાં—

अक्ष=डफ; (સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

अय=डग; ,,

क्षय=फग; ,,

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૪)

∴ ∠**फडग** એટલે **ईडग**=∠**क्षअय.**

૧લા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

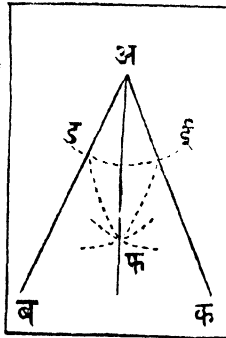
૧. આપેલા ત્રિકોણ જેવડો ત્રિકોણ દોરો.

૨. આપેલા ચતુષ્કોણ, પંચકોણ...જેવડી આકૃતિ દોરો.

૩. આપેલા કાટખુણ ત્રિકોણના બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કરો.

કૃત્ય ૨.

આપેલા ખુણાને દુભાગો.



પક્ષ—**बअक** આપેલો ખુણો છે.

સાધ્ય—**बअक** ખુણો દુભાગવો.

રચના—**अ** મધ્યબિંદુ લઈને ગમે તે ત્રિજ્યાએ, **अब** અને **अक**ને અનુક્રમે **इ** અને **ई**માં છેદે એવો કૌંસ દોરો. **इ** અને **ई** મધ્યબિંદુઓ લઈને **इई** જેટલી ત્રિજ્યાએ **फ**માં એક બીજાને છેદનારા બે કૌંસો દોરો. **अफ** સાંધો.

अफ આપેલા ખુણાને દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—

(**इफ**, **ईफ** સાંધો.)

∵ **अफई** અને **अफइ** ત્રિકોણોમાં—

अई=अइ; (એકજ વર્તુળની ત્રિજ્યા.)

फई=फइ; (સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા.)

अफ બંનેમાં સાધારણ;

∴ △ **अईफ** ≡ △ **अडफ.** (પ્ર. ૧૪.)

∴ ∠**डअफ**=∠**ईअफ.**

૨જા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

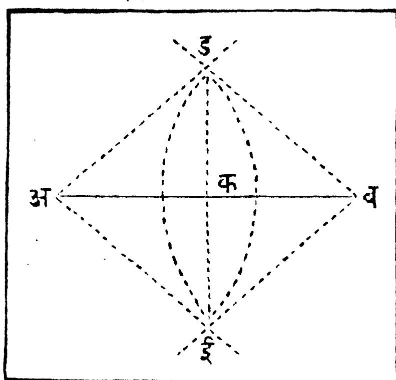
૧. આપેલા ખુણાંના ૪, ૮... સરખા ભાગ કરો.

૨. આપેલા ખુણાના બે ભાગ એવા કરો, કે એક બીજાથી ત્રણગણો થાય.

૩. **अबक** ખુણાના **बअ,बक** ભુજોમાં **ड** અને **ई** બિંદુઓ એવાં લો, કે ∠**बडई**= ૩ ∠**बईड** થાય.

કૃત્ય ૩.

આપેલી લીટીને દુભાગવી.



પક્ષ—अब આપેલી લીટી છે.

સાધ્ય—अबના બે સરખા ભાગ કરવા.

રચના—अ,ब મધ્યબિંદુઓ લઈને ½**अब**થી મોટી ત્રિજ્યાએ, **ड** અને **ई**માં એક બીજાને છેદનારા બે કોંસો દોરો. **ड,ई** સાંધો, અને સાંધનારી લીટીને **अब**ને **क**માં છેદવા દો.

अब, क બિંદુમાં દુભાગાશે.

સિદ્ધતા—

(अड,बड, अई, बई સાંધો.)

∵ अडई, बडई ત્રિકોણોમાં—

अड=बड; (સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા.)

अई=बई; ,,

डई બંનેમાં સાધારણ;

∴ △अडई ≡ △बडई. (પ્ર. ૧૪.)

∴ ∠अडक=∠बडक.

હવે △अडक, △बडकમાં—

अड=बड;

डक બંનેમાં સાધારણ;

∠अडक=∠बडक;

∴ △अडक ≡ △बडक. (પ્ર. ૧૦.)

∴ अक=कब.

૩જા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. ઉપલા કૃત્યની આકૃતિમાં **अक,डई**ને કાટખુણે દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

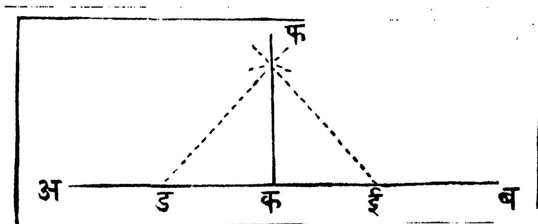
૨. આપેલી સીધી લીટીના ૪,૮......સરખા ભાગ કરો.

૩. આપેલી સીધી લીટીના એવા બે ભાગ કરો, કે (૧) એક બીજાથી ત્રણગણો થાય; (૨) એક બીજાથી સાતગણો થાય.

૪. આપેલા ત્રિકોણના પાયામાં એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો, કે તેનું સામા શિરોબિંદુથી અંતર બાકીની બે બાજુના સરવાળાના અર્ધ બરાબર હોય.

કૃત્ય ૪.

આપેલી લીટી પર તેમાં આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દોરો.



પક્ષ—**अब** આપેલી લીટી છે. **क** આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—**क**માંથી **अब** પર લંબ દોરવો.

પહેલી રીત.

રચના—આપેલી લીટીમાં **क**થી સરખે અંતરે અને તેની સામસામી બાજુએ **ड** અને **ई** બિંદુ લો. **ड**,**ई** મધ્યબિંદુઓ ધારીને **कड**થી ગમે તેટલી મોટી ત્રિજ્યાએ **फ**માં છેદનારા કાંસો દોરો. **कफ** સાંધો.

कफ, **अब** પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(**फड**, **फई** સાંધો.)

∵ △**फकड** અને △**फकई**માં—

कड=**कई**; (રચના.)

फड=**फई**; (સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા.)

कफ બંનેમાં સાધારણ;

∴ △**फकड** ≡ △**फकई**. (પ્ર. ૧૪.)

∴ ∠**फकड**=∠**फकई**.

∴ **कफ**, **अब** પર લંબ છે.

બીજી રીત.

જે બિંદુમાંથી લંબ દોરવો છે તે બિંદુ **अ** છે એમ ધારો.

રચના—અને મધ્યબિંદુ ધારી ગમે તે ત્રિજ્યાએ **कडई** કૌંસ દોરો, અને તેને **अब**ને **क**માં છેદવા દો. તેજ ત્રિજ્યાએ તે કૌંસના **कड,डई** ભાગ કાપી કાઢો. **ड** અને **ई** મધ્ય-બિંદુઓ લઈને પહેલાંના જેટલીજ ત્રિજ્યાએ એક બીજાને **फ**માં છેદનારા બે કૌંસ દોરો. **अफ** સાંધો.

સિદ્ધતા—

(**अड, अई** સાંધો.)

∵ **अड = डई = ईअ**.

∴ **अडई** સમબાજુ ત્રિકોણ છે.

∴ ∠**डअई**=૬૦°. (પ્ર. ૧૨, ઉ. સિ. ૨)

તેમજ ∵ **अफ**, ∠**डअई**ને દુભાગે છે; (કૃ. ૩)

∴ ∠**डअफ** = ૩૦°.

પણ △ **अकड** સમબાજુ છે;

∴ ∠**कअड** = ૬૦°.

∴ ∠**बअफ** = ૯૦°.

૪થા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ચોરસ જેવડો ચોરસ દોરો.

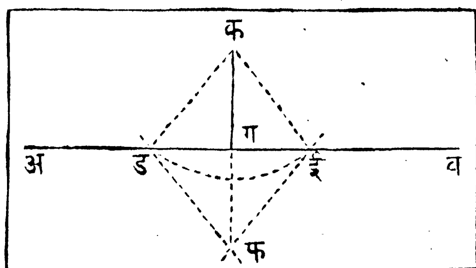
૨. ૪૫ અંશનો ખુણો કોણમાપકની મદદ વગર કાઢો.

૩. ૨૨½ અંશનો ખુણો કોણમાપકની મદદ લીધા વગર કાઢો.

૪. જેનો કર્ણ આપેલી સીધી લીટી બરાબર થાય, એવો ચોરસ દોરો.

કૃત્ય ૫.

આપેલી અમર્યાદ સીધી લીટી પર તેની બહાર આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દોરવો.



પક્ષ—**अब** આપેલી લીટી છે. **क** આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—**क**માંથી **अब** પર લંબ દોરવો.

રચના—**क** મધ્યબિંદુ અને જોઈતી ત્રિજ્યા લઈને **अब**ને **ड** અને **ई**માં છેદનારો કાંસ દોરો. **ड**,**ई** મધ્યબિંદુઓ લઈને **डई** જેટલી ત્રિજ્યાએ, એક બીજાને **फ**માં છેદે એવા બે કાંસ દોરો. **कफ** સાંધો. ધારો કે **कफ**, **अब**ને **ग**માં છેદે છે.

कग, **अब** પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(**कड**, **कई**, **फड**, **फई** સાંધો.)

∵ △**कडफ**, △**कईफ**માં

कड = **कई**;

फड = **फई**;

कफ બંનેમાં સાધારણ;

∴ △कडफ ≡ △कईफ. (પ્ર. ૧૪.)

∴ ∠डकफ=∠ईकफ.

હવે △डकग, △ईकगમાં—

∵ कड = कई;

कग બંનેમાં સાધારણ;

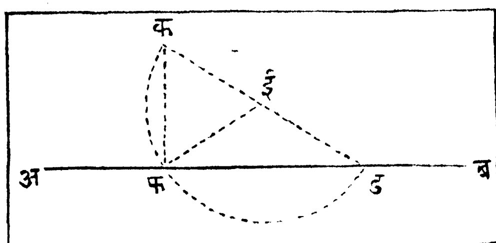
∠डकग=∠ईकग;

∴ △डकग ≡ △ईकग; (પ્ર. ૧૦.)

∴ ∠कगड=∠कगई.

∴ कग, अब પર લંબ છે.

બીજી રીત.



રચના—अबમાં (कની બરાબર નીચે ન હોય એવું) ગમે તે ड બિંદુ લો. क, ड સાંધો.

कडને ईમાં દુભાગો.

ई મધ્યબિંદુ અને ईड ત્રિજ્યા લઈને अबને फમાં છેદનારો કોંસ દોરો. कफ સાંધો.

कफ,अब પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(ई, फ સાંધો.)

∵ △ कईफ માં कई=फई.

∴ ∠ कफई=∠फकई. (પ્ર. ૧૨)

તેજ પ્રમાણે ∵ △ ईफडमां ईफ=ईड,

∴ ∠ईफड = ∠फडई. (પ્ર. ૧૨)

∴ ∠कफई+∠ईफड=∠फकई+∠फडई.

પણ ∠कफई+∠ईफड = ∠कफड;

∴ ∠कफड=∠फकई+∠फडई.

∴ ∠कफड= ½ (∠कफड + ∠फकई + ∠फडई).

પણ ∵ ∠कफड+∠फकई+ ∠फडई= ૨ કાટખુણા; (પ્ર. ૮.)

∴ ∠कफड=૧ કાટખુણો.

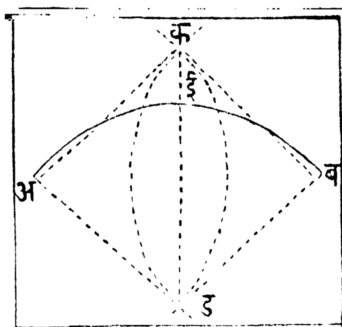
∴ कफ, अब પર લંબ છે.

૫મા કૃત્ય પરનો પ્રશ્ન.

अबक, ગમે તેવો ત્રિકોણ દોરો. દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર લંબ દોરો. આ લંબો એકજ બિંદુમાં મળે છે એ જોઈ લો.

કૃત્ય ૬.

આપેલો કાંસ દુભાગવો.



પક્ષ—अब આપેલો કાંસ છે.

સાધ્ય—अबને દુભાગવો.

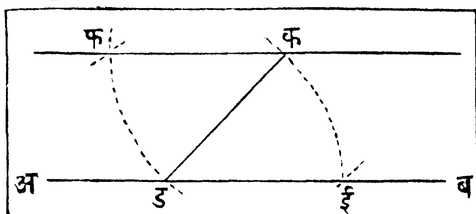
રચના—अ મધ્યબિંદુ અને **अब**ના અર્ધથી જરા મોટી ત્રિજ્યા લઈને કૌંસ દોરો. તેટલીજ ત્રિજ્યા અને **ब** મધ્યબિંદુ લઈને પહેલા કૌંસને **क** અને **ड**માં છેદે એવો બીજો કૌંસ દોરો. **कड** સાંધો.

कड, अब કૌંસને **ई**માં દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—(આ કૃત્યની સિદ્ધતા નવી ભૂમિતિના બીજા ભાગમાંના પ્રમેયના આધાર સિવાય સહેલી રીતે આપવી શક્ય નથી, માટે તે વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાની ખાસ જરૂર નથી.)

કૃત્ય ૭.

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી દોરવી.



પક્ષ—अब આપેલી લીટી છે. **क** આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—कમાંથી **अब**ને સમાંતર લીટી દોરવી.

રચના—अबમાં એક ગમે તે **ड** બિંદુ લો. **डक** સાંધો. **कडब**થી વિરુદ્ધ બાજુએ **डक** સાથે **कडब** જેવડો ખુણો કરનારી **कफ** લીટી દોરો.

સિદ્ધતા—

∵ **कफ** અને **अब** લીટીઓને **कड** લીટી મળે છે,

અને $\angle$**फकड**$=\angle$**कडब**; (રચના.)

∴ **कफ** ∥ **अब**. (પ્ર. ૪.)

ઉપલી રચનામાં ∠**બડક** જેવડો ∠**ડકગ**, **ડક**ની તેજ બાજુએ (એટલે **ડક**ની જે બાજુએ ∠**બડક** છે તેજ બાજુએ, એટલે જમણી બાજુએ) કર્યો હોય તો ચાલે કે? કેમ નહિ? તેજ બાજુ પર ખુણો કરીને સમાંતર લીટી દોરવી હોય, તો ખુણો કેવડો કરવો? તેજ બાજુ પર ∠**બડક** જેવડો ખુણો કરીને સમાંતર લીટી કાઢવી હોય, તો **ડ** બિંદુ ક્યાં લેવું?

૭મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. પાસપાસેની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો એ આપ્યાં હોય, તો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કરો.

૨. જેની દરેક નાની બાજુ મોટી બાજુથી અર્ધી હોય, એવો એક લંબચોરસ આપેલી લીટી પર દોરો.

૩. જેનો એક ખુણો ૬૦° હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ આપેલી લીટી પર કાઢો.

૪. જેનો એક ખુણો અને પરિમિતિ આપ્યાં હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

૫. જેની બે બાજુઓ અને કર્ણ અનુક્રમે ૫,૨,૪ સે. મી. હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કરો.

૬. જેની એક બાજુ ૨.૫" અને કર્ણ ૪" હોય એવો લંબચોરસ કાઢો.

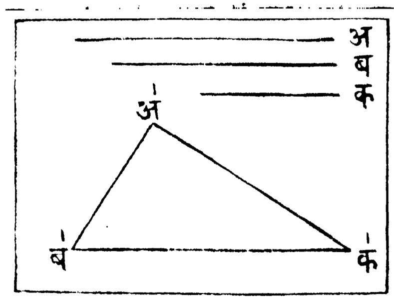
૭. આપેલી લીટીથી આપેલે અંતરે હોય એવી એક સમાંતર લીટી દોરો.

૮. બે પાસપાસેની બાજુઓ અને ગમે તે સામસામી બાજુઓની વચ્ચેનું અંતર એ આપ્યાં છે; તે પરથી તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

કૃત્ય ૮.

આપેલી ત્રણ લીટી એવી છે, કે તે પૈકી કોઈ પણ બે મળીને ત્રીજીથી વધારે છે; તો જે ત્રિકોણ-

ની બાજુએ આ લીટીઓની બરાબર થાય એવો ત્રિકોણુ દોરવો.



પક્ષ—अ, ब, क, એવી ત્રણુ આપેલી સીધી લીટીઓ છે, કે જે પૈકી કોઈ પણુ બેનો સરવાળો ત્રીજીથી વધારે છે.

સાધ્ય—अ, ब, क, જેટલી જેની બાજુઓ હોય, એવો ત્રિકોણુ દોરવો.

રચના—अ જેટલી **बक** લીટી દોરો. **ब** અને **क** મધ્ય-બિંદુઓ ધારીને અનુક્રમે **क** અને **ब** જેટલી ત્રિજ્યાએ બે કાંસો દોરો. તેમને એક બીજીને **अ**માં છેદવા દો, **अ ब, अ क** સાંધો.

अबक માંગેલો ત્રિકોણુ છે.

સિદ્ધતા—बक=अ.

कअ=ब.

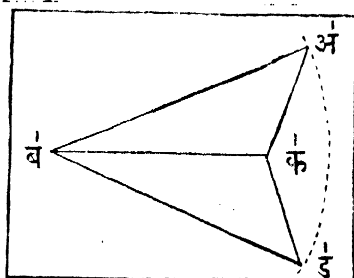
बअ=क.

∴ **अबक** ત્રિકોણુની બાજુઓ આપેલી લીટીઓની બરાબર છે.

....

ધારો કે આપણે એકજ પાયા પર બની શકે તેટલા એવા

ત્રિકોણો દોરવા છે, કે જેમની બાજુઓ આપેલી લીટીઓની બરાબર હોય; તો આપણે તે કેમ દોરીશું?



ધારો કે अ, ब, क, આપેલી લીટીઓ છે, અને તે પૈકી अ પાયો છે.

अ જેટલી बक લીટી દોરો. ધારો કે कમાંથી ब જેટલી લાંબી લીટીઓ નીકળે તેટલી દોરવી છે, તો તે કેટલી દોરી શકાશે? એવી લીટીઓના બીજા છેડા બતાવનારી લીટી (कથી ब અંતરે હોય એવાં સર્વ બિંદુઓનો માર્ગ) આપણે શી રીતે દોરી શકીએ? "क મધ્યબિંદુ અને ब જેટલી ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો." આ વર્તુળની સર્વે ત્રિજ્યાઓ ब જેટલી લાંબી છે. આ ત્રિજ્યાઓ સિવાય कમાંથી દોરેલી બાકીની સર્વ લીટીઓ बથી ઓછી કે વધારે થશે. હવે, बમાંથી क જેટલી લાંબી લીટીઓ નીકળે તેટલી દોરવી હોય, તો તે લીટીઓ કઈ થશે? "ब મધ્યબિંદુ અને क ત્રિજ્યા લઈને દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ." આ વર્તુળો એક બીજાને ક્યાં છેદે છે? "अ અને ड બિંદુઓમાં." આ બિંદુઓમાંથી ब અને क સુધી દોરેલી લીટીઓની લંબાઈ કેટલી છે? "આ બિંદુઓ સિવાય તમે બીજું

એવું કોઈ બિંદુ કાઢી શકશો, કે જેમાંથી **बं, क** સુધી દોરેલી લીટીઓ અનુક્રમે **क** અને **ब** લંબાઈની થાય? "ના."

अ, ब, क જેટલી જેની બાજુઓ અનુક્રમે છે, એવો ફક્ત એકજ ત્રિકોણ જ્યારે **बंकं**ની ઉપલી બાજુએ થઈ શકે છે; ત્યારે તેવડીજ બાજુઓનો **बंकंडं** ત્રિકોણ **बंकं** પાયા પર, **डं** છેડો ઉપલી બાજુએ રાખીનેજ મૂક્યો હોય, તો **डं** બિંદુ ક્યાં પડશે? "**अं** પર." શા માટે? "તે બીજી બાજુએ પડે તો ઉપલા નિયમને બાધ આવે."

આ ઉપરથી સિદ્ધ થાય છે, કે જેની બાજુઓ અનુક્રમે **अ, ब, क**ની બરાબર હોય એવો કોઈ પણ ત્રિકોણ **बंकं** પર મૂક્યો હોય, તો તેનું ત્રીજું શિરોબિંદુ **अं** પર પડવું જોઈએ; માટે જેમની બાજુઓ અનુક્રમે સરખી છે, એવા ત્રિકોણોના સંબંધમાં શો નિયમ નીકળે છે? "તે એકરૂપ હોય છે."

૮મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ત્રિકોણ બરાબર એક ત્રિકોણ દોરો.

૨. જેની સરખી બાજુઓમાંની એક બાજુ આપેલી હોય, એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ આપેલા પાયા પર દોરો.

૩. આપેલી લીટી પર એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ દોરો કે જેની દરેક સરખી બાજુ પાયાથી બમણી હોય.

૪. જેનો પાયો અને પરિમિતિ આપ્યાં હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ દોરો.

૫. આપેલા પાયા પર એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો.

૬. * કાટખુણાના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૭. જેની દરેક બાજુ એક કર્ણની બરાબર હોય, એવો સમબાજુ ચતુષ્કોણ કાઢો.

૮. આપેલા પાયા પર નિયમિત ષટ્કોણ કાઢો.

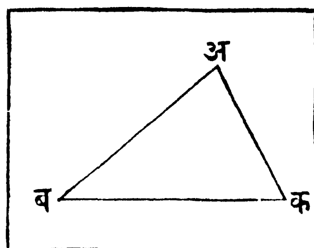
૯. એક ત્રિકોણની (પાયા સિવાયની) બે બાજુઓ અને ઉંચાઈ (સામા શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ) આપેલી છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૧૦. એક ત્રિકોણનો પાયો, એક બાજુ, અને સામા શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા એટલું આપેલું છે; તે પરથી ત્રિકોણ કાઢો.

૧૧. એક ત્રિકોણનો પાયો, ઉંચાઈ અને એક બાજુ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૧૨. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે કર્ણો અને એક બાજુ આપેલાં છે; તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

સૂચના—



ત્રિકોણના ખુણા અને બાજુઓ દર્શાવવા માટે નીચેનો સંકેત નક્કી થએલો છે. **अबक** ત્રિકોણમાં—

∠**अ** એટલે **बअक** ખુણો,

∠**ब** એટલે **अबक** ખુણો,

∠**क** એટલે **बकअ** ખુણો;

તેમજ,

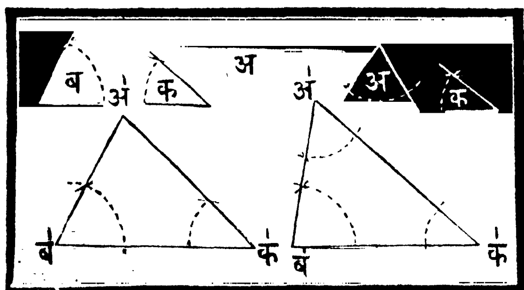
अ બાજુ એટલે ∠**अ**ની સામેની (=**बक**) બાજુ;

ब બાજુ એટલે ∠**ब**ની સામેની (=**अक**) બાજુ;

क બાજુ એટલે ∠**क**ની સામેની (=**अब**) બાજુ.

કૃત્ય ૯.

એક બાજુ અને બે ખુણા આપેલા હોય, તે પરથી ત્રિકોણ દોરવો.



એક ત્રિકોણને ત્રણ ખુણા હોય છે. તે પૈકી કોઈ પણ બે ખુણા એક બાજુને અડકેલા હોય છે, અને ત્રીજો ખુણો તે બાજુની સામે હોય છે.

એક ત્રિકોણમાંની એક બાજુ આપીને બે ખુણા આપવા, એટલે (૧) તે બાજુને અડકીને રહેલા બન્ને ખુણા આપવા; અથવા (૨) તે બાજુની સામેનો એક ખુણો અને તે બાજુને અડકી રહેલો એક ખુણો આપવો. એ સિવાય ત્રીજા પ્રકારનો સંભવ નથી.

૧ લો પ્રકાર—अ આપેલી બાજુ છે. ∠**ब** અને ∠**क** આ अ બાજુને અડકીને રહેલા બે ખુણા છે.

૨ જો પ્રકાર—अ આપેલી બાજુ. ∠**अ**=अ બાજુની સામેનો ખુણો, અને ∠**क**=अ બાજુને અડકીને રહેલો ખુણો.

(૧) **રચના**—अ લંબાઈની એક **बक** લીટી દોરો. **ब** છેડા આગળ **कबअ** એ ∠**ब** જેવડો ખુણો કરો. **क** છેડા આગળ **बकअ** એ ∠**क** જેટલો ખુણો કરો.

अबक આ માગેલો ત્રિકોણ છે.

(૨) **રચના**—∠अ અને ∠कનો સરવાળો કરીને તે બે કાટખુણામાંથી બાદ કરો. બાદબાકી આવે તે ત્રિકોણનો બાકી રહેલો ત્રીજો ખુણો છે, એટલે કે अને અડકીને રહેલા ખુણા પૈકી બીજો (ब) ખુણો છે. આ ખુણો જાણ્યા પછી પહેલા પ્રકારમાં કહ્યા પ્રમાણે કૃતિ કરીને ત્રિકોણ દોરો.

સિદ્ધતા—∵ बक = अ;

∠कबअ = ∠ब;

∠बकअ = ∠क;

∴ △ अबकની એક બાજુ અને બે ખુણા, આપેલી બાજુ અને બે ખુણા બરાબર અનુક્રમે છે.

अ બાજુ દોર્યા પછી अની અમુક બાજુએજ ∠ब દોરવો જોઈએ, અને અમુક બાજુએજ ∠क કાઢવો જોઈએ, એમ નથી. આ ખુણા ગમે તેમ દોર્યા હોય તોપણ તૈયાર થનારા ખુણા સરખાજ બને છે. આ વાત ત્રિકોણ એક પર એક મૂક્યા હોય તો ધ્યાનમાં આવશે. આ પરથી એ પણ સ્પષ્ટ થાય છે, કે બે ત્રિકોણના બબ્બે ખુણા અને એકેક બાજુ સરખી હોય તો ત્રિકોણ એકરૂપજ હોય છે.

૯મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક સાંકડો ખુણો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૨. એક કાટખુણ ત્રિકોણની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અને તેની સામેનો ખુણો આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૩. એક કાટખુણ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો બીજાથી બમણો છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૪. સમદ્વિબાજુ કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ આપેલો છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૫. એક ત્રિકોણની ઉંચાઈ અને પાયા પાસેના બંને ખુણા આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૬. એક સમબાજુ ત્રિકોણની ઉંચાઈ આપેલી છે, તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

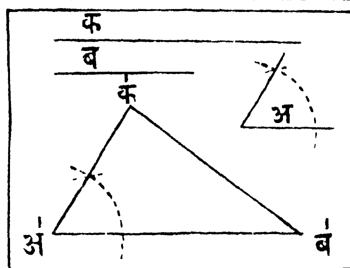
૭. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની ઉંચાઈ અને પાયાની સામેનો ખુણો એ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૮. જેનો પાયાની સામેનો ખુણો પાયા પાસેના દરેક ખુણાથી ૪ ગણો હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

૯. જેનો પાયો ૨·૪" હોય એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

કૃત્ય ૧૦.

ત્રિકોણની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો એ આપેલાં હોય, તે પરથી તે ત્રિકોણ દોરવો.



પક્ષ—ब અને **क** એ આપેલી બાજુઓ છે. **अ** આપેલો ખુણો છે.

રચના—આપેલા ∠अ જેવડો **बअक** ખુણો કાઢો. **बअक** ખુણાની **अब** અને **अक** એ બાજુઓ આપેલી **क** અને **ब** બાજુની બરાબર કરો.

अबक આ માગેલો ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

૧૦મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો અને ઉંચાઈ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

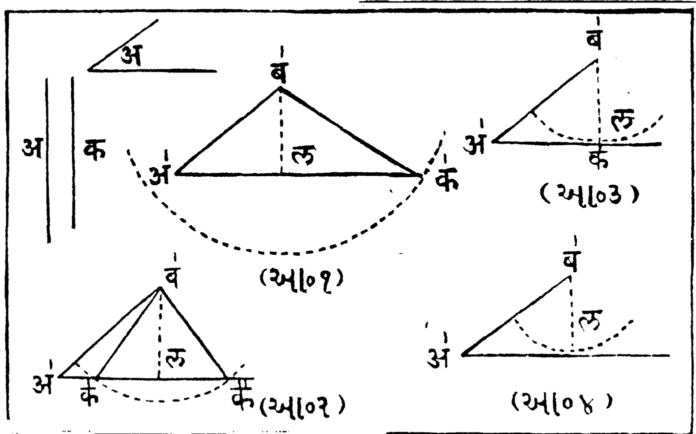
૨. જેનો એક ખુણો ૬૦° હોય અને તેમાં થઈને જતો કર્ણ ૪" લાંબો હોય, એવો સમબાજુ ચતુષ્કોણ કાઢો. તેની બાજુ કેટલી લાંબી છે?

૩. જેની મધ્યગા ૧.૨" હોય એવો સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો.

સૂચના—(કેળવણીખાતાએ નક્કી કરેલા ભૂમિતિના અભ્યાસક્રમમાં નીચેનું (૧૧મું) કૃત્ય આવતું નથી; માટે તે વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાની જરૂર નથી. આપેલા પક્ષ પરથી ત્રિકોણ બનાવવાના જે મુખ્ય પ્રકાર છે, તે બધાનો સમાવેશ થાય એટલા માટેજ ફક્ત આ કૃત્ય અહીં આપ્યું છે.)

કૃત્ય ૧૧.

ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તે પૈકી એકની સામેનો ખુણો એ આપ્યાં હોય, તે પરથી ત્રિકોણ કાઢવો.



પક્ષ—**अ** અને **क** આપેલી બાજુઓ છે, અને ∠**अ** આપેલો ખુણો છે.

રચના—∠**अ** જેવડો **ब′अ′क′** ખુણો કરો. **क** જેટલી લાંબી **अ′ब′** બાજુ રાખો. **ब′** મધ્યબિંદુ ધારીને **अ** ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો.

(ધારો કે **ल** = **ब′**માંથી **अ′क′** પર દોરેલો લંબ છે.)

अब અને **ल** સાથે સરખાવતાં अ (=**ब′क′**) ની લંબાઈ ઓછી વત્તી હોય તે પ્રમાણે નીચેના ચાર પ્રકાર થશે.

(૧) **क** (= **ब′अ′**) કરતાં अ (=**ब′क′**) વધારે લાંબી હોય, તો **अ′** બિંદુ **क′क″** પરિધની અંદર રહે છે, અને **अ′ब′क′** એવો એકજ ત્રિકોણ બને છે. (આકૃતિ ૧ જુઓ.)

(૨) **ब′क′**, **ब′अ′** કરતાં નાની, પણ **ल** કરતાં મોટી હોય, તો **अ′** છેડો પરિધની બહાર રહેશે, અને પરિધ **अ′क′** લીટીને **क′** અને **क″** એ બે ઠેકાણે છેદશે.

એવી રીતે **अ′ब′क′** અને **अ′ब′क″** એવા બે માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ બનશે. (આકૃતિ ૨ જુઓ.)

[એવે પ્રસંગે બે જવાબ આવે છે, તેથી આ સંદિગ્ધ પ્રકારનો દાખલો છે.]

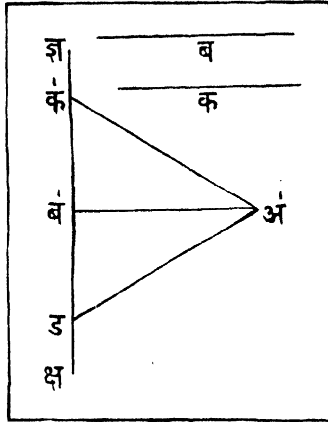
(૩) જો **ब′क′**, **ल** બરાબર હોય, તો વર્તુળ **अ′क′** લીટીને ફક્ત એકજ ઠેકાણે સ્પર્શ કરશે. એવી સ્થિતિ હોય ત્યારે (ત્રીજી આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે) ફક્ત એકજ માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ થશે.

(૪) જો **ब′क′**, **ल**થી નાની હોય, તો વર્તુળ **अ′क′** લીટીને બીલકુલ સ્પર્શ કરશે નહિ. એવી સ્થિતિમાં ત્રિકોણ બીલકુલ બની શકશેજ નહિ. (આકૃતિ ૪ જુઓ.)

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

કૃત્ય ૧૨.

કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ આપ્યાં હોય, તે પરથી ત્રિકોણ કાઢવો.



પક્ષ—**ब** કર્ણ છે, **क** બાજુ છે.

રચના—**क** જેટલી એક **बंअं** લીટી દોરો. આ લીટીની સાથે કાટખુણો કરનારી **क्षबंज्ञ** અમર્યાદ લીટી દોરો. **अं** મધ્યબિંદુ અને **ब** ત્રિજ્યા લઈને **क्षबंज्ञ** લીટીને **कं** અને **ड**માં છેદે એવો કાંસ દોરો. **अंकं** અને **अंड** સાંધો.

अंबंकं અને **अंबंड** માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—(૨૫૯ છે.)

૧૨મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણ ત્રિકોણની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અને કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલો લંબ એ આપેલાં છે; તે પરથી તે ત્રિકોણ દોરો.

૨. એક કાટખુણુ ત્રિકોણનો કર્ણ, અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો, એ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૮થી ૧૨ સુધીનાં કૃત્યો પરના પરચુરણ પ્રશ્ન.

૧. નીચે આપેલા પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવોઃ—

(૧) ∠ब=૩૦°, ब=૨″, क=૪″;

(૨) ∠ब=૧૩૫°, क=૩″, ब=૭″;

(૩) ∠ब=૪૫°, क=૩″, ब=૭″;

(૪) अ=૪″, ∠ब=૨૭°, ∠क=૬૮°;

(૫) अ=૫″, ∠अ=૨૭°, ∠क=૧૯°;

(૬) ब=૩″, ∠क=૭૯°, ∠ब=૮૮°.

૨. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ અને ઉંચાઈ આપેલી છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૩. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો અને તેની સામેનો ખુણો આપેલો છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૪. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો, અને પાયાની સામેના ખુણાનો તથા પાયાની પાસેના એક ખુણાનો સરવાળો આપેલો છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

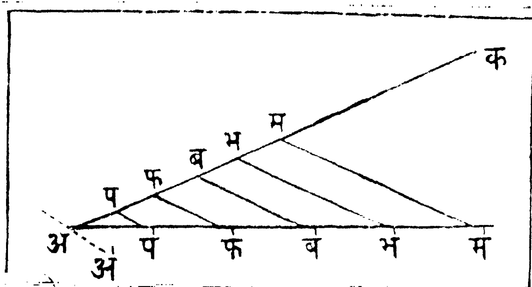
૫. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની ઉંચાઈનો અને એક બાજુનો સરવાળો તથા પાયો એ બે આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૬. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની દિશા અને ત્રણ બાજુ પૈકી દરેક બાજુમાંના એક બિંદુનું સ્થાન એ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૭. ત્રિકોણનો પાયો, ઉંચાઈ, અને તેની આસપાસ દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા એ ત્રણ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

કૃત્ય ૧૩.

આપેલી લીટીના અમુક સરખા ભાગ કરવા.



પક્ષ—**अम'** આપેલી લીટી છે.

સાધ્ય—તેના અમુક (પાંચ) ભાગ કરવા છે.

રચના—**अम'**ની સાથે સાંકડો ખુણો કરનારી ગમે તે **अक** અમર્યાદ લીટી દોરો. કંપાસ લઈને તેના બે છેડા એક બીજાથી જરા આઘા રાખીને **अ**થી શરૂ કરીને **अक** લીટીના **अप, पफ, फब, बभ, भम** એવા પાંચ સરખા ભાગ એક પછી એક લો. **मम'** સાંધો. **भ,ब,फ,प** બિંદુઓમાંથી **मम'**ને સમાંતર અને **अम'**ને છેદનારી **भभ', बब', फफ', पप'** લીટીઓ દોરો.

अप', प'फ', फ'ब', ब'भ', भ'म' આ માગેલા ભાગ છે.

अમાં થઈને **पप'**ને સમાંતર **अअ'** દોરો.

સિદ્ધતા—∵ **अअ', पप', फफ', बब', भभ', मम'** આ સમાંતર છે, અને તેમને છેદનારી **अक** લીટીના **अप, पफ**......આ ગાળાઓ સરખા છે;

∴ **अम'** લીટીના **अप', प'फ'**......આ ગાળાઓ પણ સરખા છે. (પ્ર. ૨૪)

૧૩મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલી લીટીના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૨. આપેલી લીટીનો ૨/૬ ભાગ કાપી કાઢો.

૩. આપેલી લીટીનો ૨/૫ ભાગ કાપી કાઢો.

૪. આપેલી **अब** લીટીના **क** બિંદુમાં એવા બે ભાગ કરો, કે **अक**/**कब**=૩/૫

૫. તેરમા કૃત્યની આકૃતિમાં **फफ′**/**पप′**=૨, અને **मम′**/**पप′**=૪ છે એમ સિદ્ધ કરો.

પરિશિષ્ટ અ.

પરચુરણ પ્રશ્ન.

૧. ચતુષ્કોણના **अ**, **ब**, **क**, **ड** અનુક્રમે ચાર ખુણા છે. હવે જો **अ** અને **ब** મળીને **क** અને **ड**ના સરવાળાની બરાબર હોય, તો આ ચતુષ્કોણની બે બાજુઓ એક બીજીને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૨. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાની પાસેના બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાને સમાંતર હોય છે.

૩. **अबकडई** એક નિયમિત પંચકોણ છે. તેમાં **अक**, **अड** સાંધો. **बक**, **ईड**ને લંબાવીને **फ**માં મળવા દો. **फकड** અને **अकड** ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ બતાવી આપો.

૪. * ત્રિકોણના બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી જો તેની એક બાજુને સમાંતર હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૫. ત્રિકોણના બે અંદરના ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને કદી પણ કાટખુણે છેદતી નથી.

૬. **अब**, **कड** સમાંતર લીટીઓ છે, અને તેમની વચ્ચે **प** એક બિંદુ છે; તો ∠**बपड**=∠**अबप**+∠**कडप** એમ બતાવી આપો.

૭. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાના બે છેડામાંથી સામી બાજુઓ પર લંબ દોરેલા છે; તો તે લંબ પાયાની સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમાંનો દરેક ખુણો પાયાની સામેના ખુણાથી અર્ધો છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. **अबक** ત્રિકોણના **अ** ખુણાને દુભાગનારી લીટી **बक**ને **ड**માં મળે છે, અને **बक**ને **ई** સુધી વધારેલી છે; તો ∠**अबक**+∠**अकई**= ૨ ∠**अडक** એ સિદ્ધ કરો.

૯. ત્રિકોણની **अब,अक** બાજુઓ અનુક્રમે **ड** અને **ई**માં દુભાગેલી છે; અને **बई,कड** અનુક્રમે **फ** અને **ग** સુધી એવી રીતે વધારેલી છે કે **ईफ=बई**, અને **डग=कड** થાય છે; તો **फअग** એક સીધી લીટી છે એ બતાવી આપો.

૧૦. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો, પાયો વધારવાથી થતા બહારના ખુણાની બરાબર હોય છે.

૧૧. **अबक** ત્રિકોણના **ब** અને **क** ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ **ड**માં મળે છે; તો ∠**बडक** = ૯૦° + ½**अ** છે એમ બતાવી આપો.

૧૨. **बक**ની એકજ બાજુએ **अबक** એક સમબાજુ અને **डबक** એક સમદ્વિબાજુ એવા બે ત્રિકોણ દોરેલા છે, અને ∠**बडक** = ½ ∠**बअक** છે; તો **अड** = **बक** છે એમ બતાવી આપો.

૧૩. **अबक** ત્રિકોણની **बक, कअ, अब** બાજુઓમાં **क्ष,य,ज्ञ** બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે ∠**बअक्ष**=∠**कबय** =∠**अकज्ञ**; તો બતાવી આપો કે **अक्ष, बय, कज्ञ** આ એક બિંદુમાં થઈને ન જતી હોય, તો તેમનાથી જે ત્રિકોણ થાય છે તે અને **अबक** ત્રિકોણ એ બેના ખુણાઓ અનુક્રમે સરખા છે.

૧૪. **अबकड** કાટખુણ ચતુષ્કોણની એક નાની (**अब**) બાજુમાં એક **प** બિંદુ છે; તો એવો એક સમબાજુ ચતુષ્કોણ કાઢો, કે તેનું એક શિરોબિંદુ **प** થાય, અને બાકી રહેલાં શિરોબિંદુઓ કાટખુણ ચતુષ્કોણની બાકીની બાજુઓ ઉપર પડે.

૧૫. **अबक** ત્રિકોણની **बक** બાજુ **ड** સુધી વધારી છે. **कई**, ∠**अकब**ને દુભાગે છે અને **अब**ને **ई**માં મળે છે. **ई**માં થઈને **बक**ને સમાંતર લીટી દોરી, તે **अक**ને **फ**માં અને **अकड**ને દુભાગનારી લીટીને **ग**માં મળે છે; તો **ईफ**=**फग** છે એમ બતાવી આપો.

૧૬. **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણની **अब**,**बक**,**कअ** બાજુઓમાં અનુક્રમે **प**,**द**,**र** બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે **अप**=**बद**=**कर** છે; તો △**पदर** સમબાજુ છે એમ બતાવી આપો.

૧૭. એક વર્તુળના **अअं**,**बबं**,**कंक** વ્યાસ છે; તો △**अबक** ≡ △**अंबंकं** છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૮. **अबक** ત્રિકોણની **अब**,**बक** બાજુઓ પર ત્રિકોણની બહાર **अबफग**,**बकईड** ચોરસ દોરેલા છે; તો △**अबड** ≡ △**फबक** એમ બતાવી આપો.

૧૯. **अबक** ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ પર ત્રિકોણની બહાર **बकड**, **कअई**, **अबफ** એ સમબાજુ ત્રિકોણો કાઢેલા છે; તો **अड**=**बई**=**कफ** એમ બતાવી આપો.

૨૦. **क्षय**માંના **म** બિંદુથી **क्षय**ની બંને બાજુએ **मप**, **मद** આ સરખી લીટીઓ એવી રીતે દોરેલી છે, કે ∠**यमप**=∠**यमद** છે; તો △**पक्षय** ≡ △**दक्षय** છે એમ બતાવી આપો.

૨૧. **अबकड** ચોરસ છે. તેની એકેક બાજુમાંથી **अई**, **बफ**, **कग**, **डह** આ સરખા કકડા કાપી કાઢેલા છે; તો **ई**,**फ**,**ग**,**ह** આ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૨૨. **अबक** ત્રિકોણની **अब**, **अक** બાજુઓ સરખી છે. **अबक** ત્રિકોણની બહાર **अब**, **अक** પર **अडब**, **अईक** સમબાજુ ત્રિકોણો દોરેલા છે. **बई**, **कड** એક બીજીને **म**માં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે **मड** = **मई**.

૨૩. **अबकडई** એક નિયમિત પંચકોણ છે. **अ**,**ब** ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ **म**માં મળે છે; તો **मक**, **मड**, **मई** અનુક્રમે **क**,**ड**,**ई** ખુણાને દુભાગે છે, અને **म** બિંદુ પંચકોણનાં સર્વ શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે છે, એમ બતાવી આપો.

૨૪. **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણ છે. **बक**ને વધારીને તેમાં **द** બિંદુ લીધું છે; તો તે **ब** કરતાં **अ**ની વધારે પાસે છે એમ બતાવો.

૨૫. **क्षयज्ञ** કાટખુણ ત્રિકોણમાં **क्षय**=**क्षज्ञ** છે. ∠**य**ને દુભાગનારી **यर** લીટી **क्षज्ञ**ને **र**માં મળે છે. હવે જો **यज्ञ** પર **रन** લંબ દોર્યો હોય, તો **रन** = **क्षर** છે એમ બતાવો.

૨૬. **अबक** લીટીમાંના **ब** બિંદુમાંથી **बड**,**बई** બે સરખી લીટીઓ એવી દોરી છે, કે **डबई** કાટખુણો થયો છે. **अक** પર **डफ**,**ईह** લંબો દોરેલા છે; તો **डफ**=**बह** છે એમ બતાવો.

૨૭. બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણોના પાયાની સામેના ખુણા સરખા છે, અને પાયાની સામેના ખુણામાંથી પાયા પર દોરેલા લંબો સરખા છે; તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ બતાવો.

૨૮. **अबक** ત્રિકોણની **अब** અને **अक** બાજુઓ બરાબર છે. **अब**માં **ड** બિંદુ લો. **कअ**ને **ई** સુધી વધારો, અને **अई**ને **अड** બરાબર કરો. હવે **ईड**ને વધારી હોય તો તે **बक**ને કાટખુણે છેદે છે એમ બતાવી આપો.

૨૯. જેનું મધ્યબિંદુ **म** છે એવા એક વર્તુળની **अब** જ્યા **क** સુધી વધારી છે; અને **बक**, **अम**ની બરાબર કરી છે.

कम લીટી વર્તુળને **ड**માં છેદે છે, અને વધારવાથી ફરી તેને **ई**માં છેદે છે; તો ∠**अमई**, ∠**वमड**થી ત્રણગણો છે એમ બતાવી આપો.

૩૦. એક વર્તુળના **अब** અને **कड** ગમે તે બે વ્યાસ છે. **ब** બિંદુમાંથી એક લીટી **कड**ને સમાંતર દોરી છે. આ લીટી **अब**ની સાથે જે ખુણા કરે છે, તે **कब**, **डब** લીટીઓથી દુભાગાય છે એમ બતાવી આપો.

૩૧. * **अबक** ત્રિકોણના **ब** અને **क** એ સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ સામી બાજુઓને અનુક્રમે **ई** અને **फ**માં મળે છે; તો **ईफ**, **बक**ને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૩૨. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં **अब=कड**, અને ∠**ब**= ∠**क**; તો **बक**ને **अड** સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૩૩. ઉપલા પ્રશ્નમાંના **अबकड** ચતુષ્કોણના કર્ણ સરખા છે એ બતાવી આપો.

૩૪. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં ∠**अ** = ∠**ब**, અને ∠**क**= ∠**ड**; તો **अड** = **बक** છે એ બતાવો.

૩૫. * **अबक** ત્રિકોણમાં **अब=अक**. **बक** પર દોરેલો લંબ **अब** અને **अक** બાજુ પૈકી ગમે તે એક બાજુને **ड**માં અને બીજી બાજુના વધારેલા ભાગને **ई**માં છેદે છે; તો △**अडई** સમદ્વિબાજુ છે એમ બતાવી આપો.

૩૬. **पदर** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની **पद**,**पर** સરખી બાજુઓમાં **प**થી સરખે અંતરે **क्ष** અને **य** બિંદુઓ લીધાં છે. **दय**, **रक्ष** એક બીજીને **ज्ञ**માં છેદે છે; તો **ज्ञदर**, **ज्ञक्षय** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણો છે એ સિદ્ધ કરો.

૩૭. **अबक** ત્રિકોણની **बक** બાજુમાં (જરૂર લાગે તો વધારીને) **ड** બિંદુ એવું લીધું છે, કે **बअड** અને **अबड** ખુણા સરખા થયા છે. **अडब** ખુણાને દુભાગનારી લીટી

अकને (અથવા તેના વધારેલા ભાગને) **ई**માં મળે છે; તો $\angle$**अबई**=$\angle$**बअई** છે એમ બતાવો.

૩૮. **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણના **ब** અને **क** ખુણા અનુક્રમે **बड** અને **कड**થી દુભાગાયા છે. **अब**ને સમાંતર **डई** દોરેલી છે, અને તે **बक**ને **ई**માં મળે છે. **अक**ને સમાંતર **डफ** દોરેલી છે, અને તે **बक**ને **फ**માં મળે છે; તો **बई, ईफ, फक** સરખી છે એમ બતાવો.

૩૯. **अबक** સમદ્વિબાજુ કાટખુણ ત્રિકોણ છે. તેનો **अब** કર્ણ છે. **अड** એ $\angle$**बअक**ને દુભાગનારી અને **बक**ને **ड**માં મળનારી લીટી છે; તો **अक+कड=अब** એ બતાવી આપો.

૪૦. * કાટખુણ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો બીજા સાંકડા ખુણાથી બમણો હોય, તો કર્ણ બીજી એમાંની નાની બાજુથી બમણો હોય છે.

૪૧. એક ચતુષ્કોણની ચારે બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ચતુષ્કોણની ચારે બાજુની બરાબર હોય, અને એકનો એક ખુણો બીજાના તેને મળતા આવતા ખુણાની બરાબર હોય, તો તે ચતુષ્કોણો એકરૂપ હોય છે.

૪૨. **बक** પાયાની બંને બાજુએ **अबक** અને **डबक** એકરૂપ ત્રિકોણો છે, અને તેમની એક બીજીને મળતી આવતી બાજુઓ પાયાના એકજ છેડામાં મળે છે; તો **बक**, **अड**ને કાટખુણે દુભાગે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪૩. **अबक** અને **डबक** એ બે ત્રિકોણો **बक** પાયાની એકજ બાજુએ છે. જો **अब=डक** અને **अक=डब** હોય, તો **अड, बक**ને સમાંતર છે એમ બતાવો.

૪૪. * કાટખુણ ચતુષ્કોણમાં પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓથી થતી આકૃતિ સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૪૫. **अबक** ત્રિકોણમાં **अब=अक** છે. **अब**માં ગમે ત્યાં **ई** બિંદુ લઈને તેને **बक**ના મધ્યબિંદુ **ड**ની સાથે સાંધ્યું છે; તો **अक** અને **अई**ની બાદબાકી **डई** અને **डब**ની બાદબાકી કરતાં મોટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૪૬. **अबकडईफ** ષટ્કોણ છે; તો તેની પરિમિતિ **अकई** ત્રિકોણની પરિમિતિથી વધારે છે એમ બતાવો.

૪૭. ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુ કરતાં લાંબી લીટી ત્રિકોણની અંદર કોઈ પણ ઠેકાણે દોરી શકાશે નહિ એમ બતાવો.

૪૮. **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં **ड** એક બિંદુ છે; તો **डअ, डब, डक** લીટીઓથી ત્રિકોણ બની શકશે એમ બતાવો.

૪૯. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક કર્ણ દરેક બાજુથી હંમેશ મોટો હોય છે, (પણ દરેક ચતુષ્કોણના સંબંધમાં એ સત્ય લાગુ પડતું નથી).

૫૦. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાંની સરખી બાજુઓ પૈકી દરેક બાજુ ત્રીજી બાજુથી મોટી હોય, તો સરખી બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા કરતાં નાનો હોય છે એમ બતાવો.

૫૧. **अबक** ત્રિકોણમાં **अ** સૌથી મોટો ખુણો છે; તો એમ બતાવી આપો કે જેની બાજુઓ **अब, अक,** અને ૨**बक** બરાબર હોય એવો ત્રિકોણ દોરવો અશક્ય છે.

૫૨. **अबक** ત્રિકોણના **ब** અને **क** સાંકડા ખુણા છે; અને $\angle$**क** $>$ $\angle$**ब** છે. **बक**માં **प** એક બિંદુ છે; તો **अब**થી **अप** નાની છે એમ બતાવો. **अक**થી **अप** નાની હોવા માટે **प** ક્યાં હોવું જોઈએ?

૫૩. વર્તુળમાંના **क** બિંદુમાં થઈને **अब** વ્યાસ જાય છે, અને **अक**માં વર્તુળનું મધ્યબિંદુ **म** છે; તો નીચેની બાબતો સિદ્ધ કરોઃ—

(૧) **क**થી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં **कअ** મોટી છે.

(૨) **क**થી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં **कब** નાની છે.

(૩) **क**માંથી **कक्ष** અને **कय** આ બે ગમે તે લીટીઓ પરિધ સુધી દોરેલી હોય, અને જો ∠**कमक्ष** > ∠**कमय** હોય, તો **कक्ष** > **कय**; અને

(૪)—ઉપલા (૩)નો વ્યત્યાસ.

૫૪. એક વર્તુળનો **अब** વ્યાસ છે, અને તેને વર્તુળની બહારના **क** બિંદુ સુધી વધાર્યો છે. વર્તુળનું મધ્યબિંદુ **म** છે; તો નીચેની બાબતો સિદ્ધ કરોઃ—

(૧) **क**થી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં **कअ** મોટી છે.

(૨) **क**થી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં **कब** નાની છે.

(૩) **क**માંથી **कक्ष** અને **कय** પરિધ સુધી દોરેલી છે, અને ∠**क्षमक** > ∠**यमक** છે; તો **कक्ष** > **कय**; અને

(૪)—ઉપલા (૩)નો વ્યત્યાસ.

૫૫. **अबक** સમબાજુ ત્રિકોણમાં **म** એક બિંદુ છે. જો ∠**मअब** > ∠**मअक** હોય, તો ∠**मकब** > ∠**मबक** છે એ સિદ્ધ કરો.

૫૬. * સમબાજુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધ્યાં હોય તો કઈ આકૃતિ થાય છે?

૫૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના અંદરના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓથી જે કાટખુણ ચતુષ્કોણ થાય છે, તેના કર્ણો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓને સમાંતર હોય છે અને તેમની બાદબાકીની બરાબર હોય છે.

૫૮. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના **अक** કર્ણમાં

प અને **द** બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે **अप=कद** છે; તો **बपडद** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવી આપો.

૫૯. **अब**ની એકજ બાજુએ **अबकड** અને **अबक्षय** આ બે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણો દોરેલા છે; તો બતાવો કે **कडयक्ष** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

૬૦. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો **अक** કર્ણ **ई** સુધી એવી રીતે વધાર્યો છે, કે **कई = कअ** થાય છે. **ई**માંથી **कब**ને સમાંતર **ईफ** દોરેલી છે, અને તે વધારેલી **डक** લીટીને **फ**માં મળે છે; તો **अबफक** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૧. **अबकड** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની **अब**, **बक**, **कड**, **डअ** બાજુઓમાં અનુક્રમે **ई**, **फ**, **ग**, **ह** બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે **अह=कफ** અને **अई=कग**; તો **ईफगह** સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૨. * **अब** લીટીનું **क** મધ્યબિંદુ છે. **अ**,**ब**,**क**થી અનુક્રમે **अक्ष**, **बय**, **कज्ञ** લંબો આપેલી લીટી પર દોરેલા છે. જો **अ** અને **ब** આપેલી લીટીની એકજ બાજુએ હોય, તો એમ બતાવો કે **अक्ष+बय=२कज्ञ** છે.

૬૩. *ઉપલા પ્રશ્નમાં **अ** અને **ब** જો આપેલી લીટીની સામસામી દિશાએ હોય, તો **अक्ष−बय=२कज्ञ** છે એમ બતાવો.

૬૪. **अबक** ત્રિકોણમાં **अ** ખુણાને દુભાગનારી લીટી, અને **बक**ને દુભાગનારો લંબ, એ એકમેકને **ड** બિંદુમાં છેદે છે; અને **ड**માંથી **अब** અને **अक** પર (જરૂર હોય તો એ બાજુઓને વધારીને) **डक्ष**, **डय** લંબો દોરેલા છે; તો **अक्ष=अय** અને **बक्ष=कय** એ સિદ્ધ કરો.

૬૫. **अबक** એક સમબાજુ ત્રિકોણ છે, અને **अब**માં **ड** એક ગમે તે બિંદુ છે. **अड** પર **क**થી વિરુદ્ધ બાજુએ **अडई** સમબાજુ ત્રિકોણ દોર્યો છે, તો **बई=कड** છે એમ બતાવો.

૬૬. **अबक** ત્રિકોણમાં **ब**માંથી **अक**ને મળનારી અને **क**માંથી **अब**ને મળનારી એવી બે લીટીઓ દોરી હોય, તો તે એક બીજીને દુભાગી શકતી નથી એમ બતાવો.

૬૭. **बक** પાયા પર **अबक** અને **डबक** ત્રિકોણો છે, અને **अड** ‖ **बक** છે. હવે **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ હોય, તો તેની પરિમિતિ **डबक** ત્રિકોણની પરિમિતિથી ઓછી છે એમ બતાવો.

૬૮. **अबकड** ચોરસ છે. **अ**માંથી **बक** અને **कड**નાં મધ્યબિંદુઓ સુધી, અને **क**માંથી **डअ** અને **अब**નાં મધ્યબિંદુઓ સુધી લીટીઓ દોરેલી છે; તો તે લીટીઓથી થતી આકૃતિ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૯. **अबक** ત્રિકોણના **अ** શિરોબિંદુમાંથી **बक** પાયા સુધી **अड**, **अई** લીટીઓ એવી દોરી છે, કે ∠**बअड**=∠**क** અને ∠**कअई**=∠**ब** થાય છે; તો **अ**માંથી **बक** પર દોરેલો લંબ **डई**ને દુભાગે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭૦. **अबक** ત્રિકોણની **अब** બાજુના **ड** મધ્યબિંદુમાંથી **बक**ને સમાંતર **डई** દોરેલી છે, અને **अबक** ખુણાને **बई** દુભાગે છે; તો ∠**अईब** કાટખુણો છે એમ બતાવો.

૭૧. **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેનો ખુણો **अ** અર્ધો કાટખુણો છે, અને **अ** અને **ब**માંથી સામી બાજુ પર દોરેલા **अड** અને **बई** લંબો **फ**માં મળે છે; તો **फई**=**ईक** છે એમ બતાવો.

૭૨. **अड** લીટી **अबक** ત્રિકોણના **अ** આગળના બહારના ખુણાને દુભાગે છે. **क**માંથી **अड** પર દોરેલો લંબ **अड**ને **न**માં મળે છે. **बक**નું **म** મધ્યબિંદુ છે; તો **मन**=$\frac{1}{2}$(**अब**+**अक**) છે એમ બતાવો.

૭૩. **अबकड** ચતુષ્કોણની **अब**, **डक** બાજુઓની બરા-

બર અને તેમને સમાંતર જેની બાજુઓ હોય, એવો એક ત્રિકોણ દોર્યો છે; અને તેજ ચતુષ્કોણની **अड, कब**ની બરાબર અને તેમને સમાંતર જેની બાજુઓ હોય એવો બીજો ત્રિકોણ દોર્યો છે; તો તે ત્રિકોણોના પાયા સરખા છે એમ બતાવી આપો.

૭૪. **अबक** ત્રિકોણના બહારના **अ** ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં ગમે ત્યાં **प** બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે **अब+अक** <**पब+पक**.

૭૫. **अबकडईफगह** નિયમિત અષ્ટકોણ છે, અને તેમાં **अफ, बई, कह, डग** લીટીઓ દોરી છે; તો તેમનાં છેદનબિંદુઓ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે એમ બતાવો.

૭૬. **अड** લીટી **अबक** ત્રિકોણના **अ** ખુણાને દુભાગે છે. **क**માંથી **अड** પર કાઢેલો લંબ **अड**ને **न**માં મળે છે, અને **बक**નું **म** મધ્યબિંદુ છે; તો બતાવો કે **मन**= $\frac{1}{2}$(**अब–अक**).

૭૭. **अबक** ત્રિકોણની **अब, अक** બાજુઓમાં અનુક્રમે **ड, ई** બિંદુઓ લીધાં છે; અને **बई, कड** લીટીઓ **फ**માં મળે છે; તો **डअ+अई** > **ईफ+फड** એમ બતાવો.

૭૮. ચતુષ્કોણની સામસામી બે બાજુઓ અથવા પાસ-પાસેની બે બાજુઓ સરખી હોય, તો બાકીની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધનારી લીટી સરખી બાજુઓની સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૭૯. **अबक** ત્રિકોણમાં **अब=अक. बक**માં **ड** ગમે તે એક બિંદુ છે. **बड, डक**નાં મધ્યબિંદુઓમાંથી **बक** પર દોરેલા લંબો **बअ, अक**ને અનુક્રમે **ह** અને **च**માં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે **हब=अच** અને **अह=कच** છે.

૮૦. એક લીટીમાં **अ,ब,क** બિંદુઓ હારબંધ એવાં લીધાં

છે કે **अब**= $\frac{1}{2}$ **बक**. **ब** મધ્યબિંદુ ધારી $\frac{1}{2}$**अब** ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ કાઢ્યું છે. તેના પરિધિ પર **प** એક ગમે તે બિંદુ લીધું છે, અને **अ,प** બિંદુઓને સાંધનારી લીટી વધારીને **पद**=**अप** કરી છે. હવે **दब, दक** સાંધો અને ∠**बदक** કાટખુણો છે એમ બતાવો.

૮૧. **अबक** ત્રિકોણની **बक** બાજુનું **ड**, અને **अड**નું **ई**, મધ્યબિંદુ છે. **बई** વધારવાથી તે **अक**ને **फ**માં મળે છે; તો **अफ**= $\frac{1}{3}$**अक** છે એમ બતાવો.

૮૨. **अबक** એક ત્રિકોણ છે. **बक**નું **ड** મધ્યબિંદુ છે. **अक**માં **फ** બિંદુ એવું લીધું છે, કે **अफ**= $\frac{1}{3}$**अक** થાય છે. **अड, बफ** એક બીજાને **ई**માં છેદે છે; તો **अड**નું **ई** મધ્યબિંદુ છે, અને **ईफ**= $\frac{1}{4}$**बफ** છે એમ બતાવી આપો.

૮૩. એક ત્રિકોણમાં એવો એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો કે તેના કર્ણો ત્રિકોણમાં આપેલા એક બિંદુમાં એક બીજાને છેદે.

૮૪. **अबकड** ચતુષ્કોણમાં **प** બિંદુ ક્યાં લીધું હોય તો **पअ**+**पब**+**पक**+**पड**નો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થશે?

૮૫. ચતુષ્કોણ આકારના કાગળના ખુણા વાળવાથી તેમનાં શિરોબિંદુઓ એકજ બિંદુમાં મળે, અને કાગળ બધે ઠેકાણે બેવડો થાય, એટલા માટે કાગળનો આકાર કેવો હોવો જોઈએ?

૮૬. **अब** પાયો અને **अ**માંથી પડતો **बक** ઉપરનો લંબ આપેલા છે; તો **अबक** સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

૮૭. આપેલાં બે બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય એવી, આપેલા એક ત્રીજા બિંદુમાંથી એક સીધી લીટી દોરો.

૮૭(અ). એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી એક લીટી દોરો કે જે એક બીજીને છેદનારી બીજી બે લીટીઓની સાથે સરખા ખુણા કરે.

૮૮. જે ત્રિકોણુની બે બાજુઓ આપેલી બે લીટીઓની બરાબર હોય, અને આ બે બાજુઓ પૈકી એકની સામેનો ખુણો આપેલા ખુણા બરાબર હોય, એવો ફક્ત એકજ ત્રિકોણુ ક્યારે બને છે ?

૮૯. **अबक** ત્રિકોણુના **अ** શિરોબિંદુમાંથી **बक**ને સમાંતર **डअई** લીટી એવી દોરો કે **डई=बड+कई** થાય.

૯૦. **अबक** એક ત્રિકોણુ છે, અને **अ**માંથી **बक**ને સમાંતર એક લીટી કાઢી છે; તો **ब**માંથી **अक**ને **प**માં મળે એવી અને ઉપલી સમાંતર લીટીને **द**માં મળે એવી એક લીટી એવી રીતે દોરો, કે **बप** લીટી **पद**ના $\frac{1}{2}$ બરાબર થાય.

૯૧. **कड** લીટીની એકજ બાજુએ **अ** અને **ब** બિંદુઓ છે. **कड**માં એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો, કે (૧) તે બિંદુ-થી **अ** અને **ब**નાં અંતરોની બાદબાકી ઓછામાં ઓછી થાય; અને (૨) તે અંતરોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થાય.

૯૨. **अबक** એક આપેલો ત્રિકોણ છે, અને **डई**, **फग** આ આપેલી લીટીઓ એક બીજીને છેદે છે; તો **अबक** ત્રિકોણુની સાથે એકરૂપ હોય એવો, અને જેની એક બાજુ **डई** પર પડે અને એક શિરોબિંદુ **फग** પર પડે, એવો ત્રિકોણ શી રીતે દોરવો તે બતાવો.

૯૩. **अबक** ત્રિકોણુના **अ** શિરોબિંદુમાંથી એવી એક લીટી દોરો કે તે પર **ब** અને **क**માંથી દોરેલા લંબો ૧ : ૨ આ પ્રમાણુમાં હોય.

૯૪. ચાર બાજુઓ અને એક ખુણો આપ્યાં છે, તે ઉપર-થી ચતુષ્કોણુ દોરો.

૯૫. **अ** અને **ब** બિંદુઓ **कड** લીટીની (૧) સામ-સામી દિશાએ છે એમ ધારીને, અને (૨) એકજ બાજુએ છે એમ ધારીને, **कड**માં **प** બિંદુ એવું શોધી કાઢો, કે $\angle$**अपक**= $\angle$**बपड** થાય.

૯૬. પાયાની સામેનો ખુણો અને પાયાની પાસેનો એક ખુણો એ એનો સરવાળો આપ્યો છે; તો આપેલા પાયા પર સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

૯૭. ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુને મળનારી એવી એક લીટી દોરો કે તે પર બાકીનાં બે શિરોબિંદુઓમાંથી દોરેલા લંબો સરખા થાય.

૯૮. **अबक** ત્રિકોણની **अब** અને **अक** આ સરખી બાજુઓમાં **क्ष** અને **य** બિંદુઓ એવાં લો, કે **बक्ष=क्षय =यक** થાય.

૯૯. એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી એક લીટી કાઢો, કે આપેલી બે સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનો તેનો ભાગ આપેલી લંબાઈનો થાય. એમ કરવું કયારે અશકય થાય છે?

૧૦૦. નીચેના પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

(૧) अ+ब, क, ∠अ.
(૨) ब−क, अ, ∠क.
(૩) क, ∠ब અને પરિમિતિ.
(૪) કાટખુણ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો અને પરિમિતિ.
(૫) ब+क, अ, ∠अ.
(૬) ब−क, अ, ∠अ.
(૭) अ, क−ब, ∠क−∠ब.
(૮) अ, क+ब, ∠क+∠ब.
(૯) अ, ∠अ, ∠ब−∠क.
(૧૦) अ=૨″, ∠अ=૪૦°, ∠ब−∠क=૨૦°.
(૧૧) अ+ब=૩″, क=૨·૬″, ∠क=૧૨૦°.
(૧૨) अ=૪″, क−ब=૧·૪૧″, ∠अ=૬૦°.
(૧૩) अ+ब=૩·૭″, क=·૭૫″, ∠अ=૬૨°.
(૧૪) પરિમિતિ=૫″, ∠अ=૪૨°, ∠ब=૩૬°.
(૧૫) क=૨·૪″, ब−अ=૧·૬″, ∠ब−∠अ=૬૫°.
(૧૬) ब=૧·૧″, क+अ=૩·૧″, ∠क−∠अ=૬૦°.

પરિશિષ્ટ બ.

પ્રશ્નો છોડવાની પૃથક્કરણપદ્ધતિ.

જેમ શસ્ત્રનો ઉપયોગ કરતાં આવડ્યા સિવાય શસ્ત્ર હાથમાં હોય તોપણ તે ન હોય તેના જેવુંજ છે, તેમજ જ્ઞાનના સંબંધમાં પણ છે; એટલે કે જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતાં આવડ્યા સિવાય જ્ઞાન હોય અથવા ન હોય તે સરખુંજ છે. માટે જે જ્ઞાન વિદ્યાર્થીઓને આપવામાં આવ્યું હોય, તે જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતાં તેમને શીખવવું જોઈએ. ભૂમિતિના વિષયમાં જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરવો એટલે પ્રશ્ન છોડવા એજ છે. તેથી કરીને ભૂમિતિના વિષયમાંના જ્ઞાનનો છોકરાઓને ઉપયોગ કરતાં આવડે, એટલા માટે ભૂમિતિમાંના પ્રશ્ન છોડવાની શક્તિ છોકરાઓમાં ઉત્પન્ન કરવાની જરૂર છે.

તેમ છતાં પણ આ પ્રશ્નો શી રીતે છોડવા એ એક મોટી મુશ્કેલી છે. વિદ્યાર્થીઓને પહેલવહેલા પ્રશ્ન આપવામાં આવે, કે તેઓ ગભરાઈ જાય છે, અને પ્રશ્ન છોડવાની કોઈ પણ રીત તેમને ન આવડતી હોવાથી તેમનો એવો અભિપ્રાય થાય છે, કે પ્રશ્નનો ઉત્તર આવડવો એ એક નસીબની વાત છે. પરંતુ ખરી વાત એમ નથી. પ્રશ્ન છોડવામાં ફત્તેહમંદ ઉતરવા માટે સ્વાભાવિક બુદ્ધિ એક આવશ્યક બાબત છે; પણ પ્રશ્ન છોડવાની પદ્ધતિની માહીતી અને મહાવરો એ બાબતો પણ તેટલીજ અગત્યની છે. માટે આ પદ્ધતિથી છોકરાઓને જાણીતા કર્યા હોય, અને તેમને પ્રશ્ન છોડવાની ટેવ પડે, તો તેઓ આ કામમાં ઘણા આગળ વધશે. આ પ્રશ્ન છોડવાની પદ્ધતિ કઈ તે આગળ જણાવ્યું છે, તોપણ તે પદ્ધતિનું વર્ણન કરતાં પહેલાં એટલું કહેવું અવશ્યનું છે, કે બીજી કોઈ પણ ઇષ્ટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની

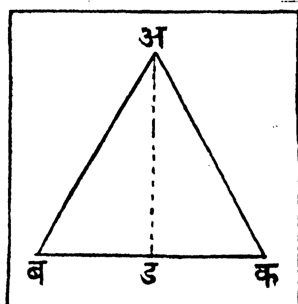
યુક્તિ શોધી કાઢવાની આપણી હંમેશની જે પદ્ધતિ છે, તે પદ્ધતિનું અને આ પદ્ધતિનું તત્ત્વ એકજ છે. જ્યારે કોઈ બાબત આપણે સિદ્ધ કરવી હોય છે, ત્યારે તે સિદ્ધ કરવાની યુક્તિ ખોળતી વખતે આપણે સાધારણ રીતે જોતાં નીચે પ્રમાણે યત્ન કરીએ છીએ. પ્રથમ આપણે એવો વિચાર કરીએ છીએ, કે એક ઇષ્ટ બાબત **अ** સિદ્ધ કરવા માટે તેનું સાધન **ब** આપણે પ્રાપ્ત કરવું જોઈએ; અને **ब** મેળવવા માટે **क** પ્રાપ્ત કરવું જોઈએ. પરંતુ આમાંથી કોઈ પણ સાધન આપણને અનુકૂળ નથી એવું આપણને માલમ પડે છે, એટલે આ કારણોની પરંપરાની વધારે શોધ કરવી જોઈએ એમ આપણને લાગે છે. એવી શોધ કરતાં કરતાં **क**નું સાધન **ड** છે, અને **ड**નું સાધન **क्ष** છે, અને **क्ष** આપણને અનુકૂળ છે, એમ જણાઈ આવે છે. પછી આપણે એવો વિચાર નક્કી કરીએ છીએ, કે **क्ष** આપણને અનુકૂળ છે, માટે **क्ष** પરથી **ड**, અને **ड** પરથી **क** અનુકૂળ કરી લેવું; અને **क** અનુકૂળ થયું એટલે તે પરથી **ब**, અને **ब** પરથી **अ** સિદ્ધ કરી લેવું. દાખલા તરીકે એકાદ નોકરી જોઈતી હોય, અને તે વગથી અથવા ભલામણથી મળવા જેવી હોય, તો આપણે એવો વિચાર કરીએ છીએ, કે મને નોકરી આપવી **अ** અધિકારીના હાથમાં છે; તે અધિકારી પાસે **ब**નું વજન છે; **ब**, **क**નો સ્નેહી છે, પણ **क**ની સાથે અમારે કંઈ સ્નેહ નથી; માટે **क**ના સ્નેહીઓમાં અથવા સ્નેહીઓના સ્નેહીઓમાં આપણી ઓળખાણવાળો કોઈ છે કે નહિ એની તપાસ કરવી જોઈએ. એવી રીતે તપાસ કરતાં **क**ના સ્નેહીઓમાં આપણો ઓળખીતો માણસ જડયો, એટલે તેની મારફતે **क**ને મળી, **क**ની મદદથી **ब**ને અને **ब**ની મદદથી **अ**ને આપણે અનુકૂળ કરી લઈએ છીએ. એજ પદ્ધતિ (ઇષ્ટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની) આપણી બીજી બધી યુક્તિઓમાં દેખાય છે; એટલે

કે કોઈ પણ ઇષ્ટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની આપણી હંમેશની રીત એવી હોય છે, કે તે વસ્તુ પ્રાપ્ત કરાવે એવાં સાધનોની પરંપરાની આપણે તપાસ કરતા જઈએ છીએ; અને તે સાધનોમાંનું એકાદ સાધન આપણા તાબામાંનું અથવા આપણું જાણીતું જણાયું, એટલે તે સાધન મારફતે આપણે ઇષ્ટ વસ્તુ મેળવીએ છીએ. એજ માર્ગ આપણે ભૂમિતિમાં સ્વીકારવો પડે છે. આ રીતનું પૃથક્કરણ કરીએ તો સાર નીચે પ્રમાણે જણાઈ આવે છે. જે બાબત સિદ્ધ કરવી છે, તે સિદ્ધ થઈ ગઈ છે, એવી કલ્પના કરીને તે સિદ્ધ કરવામાં કઈ બાબતો સાધનરૂપ છે, એની આપણે શોધ કરીએ છીએ; અને એવી શોધ કરતાં કરતાં ધારેલી વસ્તુ મેળવવામાં આધારભૂત હોય એવી આપણા તાબામાંની અથવા આપણી જાણીતી વાત જડી આવે છે, એટલે તેને આધારે આપણે ઇષ્ટ વસ્તુ તરફ જઈએ છીએ. આ પ્રમાણે સાધ્ય વસ્તુ(નાં સાધનો)નું પ્રથમ પૃથક્કરણ, અને પૃથક્કરણ કરી આધાર જડ્યો એટલે તે આધારે એકીકરણ, આ બે ક્રિયાઓ દરેક પ્રયત્નમાં આવશ્યક હોય છે. હવે એજ તત્ત્વ ભૂમિતિને લાગુ કરીએ, તો કોઈ પણ પ્રશ્ન છોડવાની રીત નીચે પ્રમાણે હોવી જોઈએ એમ જણાઈ આવશે. જે સત્ય સાબીત કરવાનું હોય, અથવા જે રચના કરવાની હોય, તે સત્ય સિદ્ધ થયું છે, અથવા તે રચના બની ગઈ છે, એમ પ્રથમ ધારવું. પછી તે સિદ્ધ થવા માટે કઈ સાધનભૂત બાબતો સિદ્ધ થવી જોઈએ એનો વિચાર કરવો. તે બાબતો સમજાય, એટલે તે સિદ્ધ થવા માટે બીજી કઈ બાબતો સિદ્ધ થવી જોઈએ એનો વિચાર કરવો. એવો વિચાર કરતાં કરતાં, જે બાબત પ્રમેયના પક્ષ પરથી આપણા જાણવામાં હોય, તેની સાથે સાધનોની પરંપરાનો સંબંધ જોડવો. છેક પક્ષ સુધી ઉપલી સાધનપરંપરાનો સંબંધ નક્કી થયો, એટલે ઉલટો ક્રમ સ્વીકારી સિદ્ધ કરવું હોય તે સિદ્ધ કરવું.

પૃથક્કરણપદ્ધતિનાં ઉદાહરણ.

ઉદાહરણ ૧.

સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાના બે સરખા ભાગ કરે છે.



अबक સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, અને તેના પાયાની સામેનો ખુણો દુભાગનારી લીટી **अड** છે. તે **ड** બિંદુમાં **बक**ના બે સરખા ભાગ કરે છે, એવું આપણે સિદ્ધ કરવું છે એમ ધારો.

પૃથક્કરણ.

बड, डकની બરાબર છે એમ ધારીએ, તો તે વાત સિદ્ધ થવા માટે પહેલાંનાં કયાં કારણો અનુકૂળ હોવાં જોઈએ? બે લીટીઓ અરસપરસ સરખી છે એમ નક્કી થવા માટે (૧) તે બંને કોઈ ત્રીજી લીટીની બરાબર, અથવા તેના કોઈ અમુક અંશ, અથવા તેનાથી અમુકગણી હોવી જોઈએ; (૨) અથવા તે એકજ ત્રિકોણમાંના બે સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ હોવી જોઈએ; (૩) અથવા બે એકરૂપ ત્રિકોણોની સંગત બાજુઓ હોવી જોઈએ......વગેરે. આ-માંની પહેલી કલ્પનાને કોઈ આધાર જડતો નથી. બીજી

કલ્પનાને પણ આધાર નથી. માત્ર ત્રીજી કલ્પનાને આધાર મળવાનો સંભવ લાગે છે. હવે આ કલ્પના ખરી કરવા માટે, એટલે △**अडब** અને △**अडक** એકરૂપ કરવા માટે, કઈ બાબતો ખાસ જરૂરની છે? બે ત્રિકોણ એકરૂપ કરવા માટે બંનેની ત્રણે બાજુઓ અરસપરસ સરખી જોઈએ, અથવા બેની બબ્બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા એ સરખાં હોવાં જોઈએ, અથવા......વગેરે. આમાંની પહેલી કલ્પના સંભવતી નથી, પણ બીજી કલ્પના તો વસ્તુસ્થિતિની સાથે પુરેપુરી મળતી આવે છે. કારણ કે પક્ષ પ્રમાણે **अब, अड** બાજુઓ અને ∠**बअड** અનુક્રમે **अक, अड** બાજુઓ અને ∠**कअड**ની બરાબર છે.

बड અને **कड** એક બીજીની બરાબર સિદ્ધ કરવા માટે જે પૂર્વ કારણો આવશ્યક હતાં, તેમની પરંપરા જોતાં તેમાંના એક પગથીઆનો સંબંધ પક્ષની સાથે મળતો આવે છે, એવું જણાઈ આવે છે; માટે આ પગથીઆથી પાછળ પાછળ જઈએ, તો આપણે સિદ્ધ કરવાની બાબત પર જઈ પહોંચીએ એ ખુલ્લું છે.

એકીકરણ.

∵ **बअड** અને **अकड** ત્રિકોણોમાં—

बअ = कअ;

अड બંનેમાં સાધારણ;

∠**बअड** = ∠**कअड**;

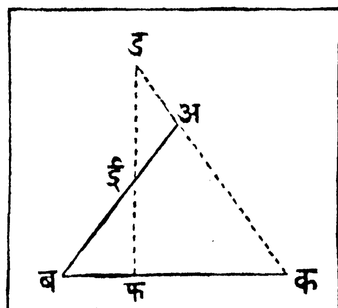
∴ △**बअड** ≡ △**कअड**.

∴ **बड=कड**.

ઉદાહરણ ૨.

अबक સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તેની कअ બાજુ ड સુધી વધારી છે; अबમાંથી अड જેટલો અર્દ્ધ ભાગ કાપી કાઢ્યો છે; बकને फ બિંદુમાં મળતાં

સુધી ડઈને વધારી છે; તો ∠ડફક એક કાટખુણો છે એમ સિદ્ધ કરો.



પૃથક્કરણ.

∠डफक કાટખુણો છે એમ ધારો. તેમ ધારીએ તો—

∠डफक=∠फडक+∠डकफ. (પ્ર. ૮)

પણ ∠डफक=∠फबई+∠बईफ; (પ્ર. ૮, ઉ. ૩)

∴ ∠फडक + ∠डकफ = ∠फबई + ∠बईफ (= ∠अईड).

પણ ∠डकफ = ∠फबई.

∴ ઉપલા સમીકરણમાંથી આ ખુણા લઈ લીધા હોય તો-

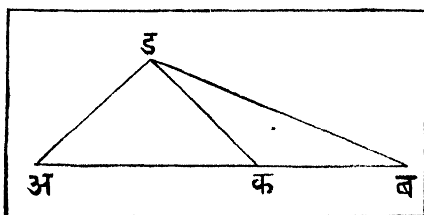
શેષ ∠फडक = શેષ ∠अईड.

હવે ∠फडक = ∠अईड એ પક્ષ છે; માટે અહીંથી ઉલટા ક્રમે જવાથી ∠डफक કાટખુણો છે એમ સિદ્ધ થશે.

એકીકરણ (૨૫૯ છે.)

ઉદાહરણ ૩.

આપેલી લીટીના એવા બે ભાગ કરવા, કે તે-માંના એક પરનો ચોરસ બીજા પરના ચોરસથી બમણો થાય.



પૃથક્કરણ.

अब આપેલી લીટી છે. ધારો કે તેના **क** બિંદુમાં માગ્યા પ્રમાણે ભાગ થયા છે.

હવે જો $\text{अक}^2 = 2\ \text{बक}^2$ હોય, તો **अक** જેનો કર્ણ હોય એવા સમદ્વિબાજુ કાટખુણ ત્રિકોણની એક બાજુના વર્ગની બરાબર **बक**નો વર્ગ હોવો જોઈએ.

એવો **अकड** ત્રિકોણ કાઢો, એટલે કે $\angle$**अकड**, $\angle$**कअड** દરેક ૪૫°નો કરો.

$\because$ $\text{कड}^2 = \text{कब}^2$,

$\therefore$ **कड = कब**,

$\therefore$ $\angle$**बडक**$=\angle$**कबड.**

$\because$ **अड=कड**,

$\therefore$ $\angle$**डअक**$=\angle$**डकअ** $= \frac{1}{2}$ કાટખુણો;

(કારણ કે $\angle$**अडक**= ૧ કાટખુણો.) (રચના.)

$\therefore$ $\angle$**डकब** બહારનો ખુણો$=1\frac{1}{2}$ કાટખુણો, (પ્ર. ૧)

$\therefore$ $\angle$**कडब**$+\angle$**कबड**$= \frac{1}{2}$ કાટખુણો. (પ્ર. ૮)

$\therefore$ $\angle$**कबड**$= \frac{1}{4}$ કાટખુણો, અને $\angle$**कडब**$= \frac{1}{4}$ કાટખુણો.

હવે **अबड** ત્રિકોણના $\angle$**बअड** અને $\angle$**अबड** આપણે જાણીએ છીએ, અને **डकब** ત્રિકોણના પણ બધા ખુણા જાણીએ છીએ. તેથી આ ત્રિકોણો કાઢી શકાશે; અર્થાત્ **क** બિંદુનું સ્થળ પણ કાઢી શકાશે.

એકીકરણ.

∠બઅડ $\frac{1}{2}$ કાટખુણા બરાબર કરે.

∠અબડ $\frac{1}{4}$ કાટખુણા બરાબર કરે.

∠બડક $\frac{1}{4}$ કાટખુણા બરાબર કરે.

क ઇષ્ટ બિંદુ છે.

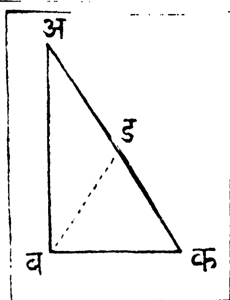
ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા.

કોઈ કોઈ વખતે સાધ્ય સિદ્ધ કરવા માટે કયાં કારણો અનુકૂળ હોવાં જોઈએ એનો વિચાર કરવા કરતાં, સાધ્ય ખોટું છે એમ ધારવાથી કઈ અસંભવિત બાબતો અથવા પક્ષથી વિરુદ્ધ બાબતો ઉત્પન્ન થાય છે, તેનો વિચાર કરીને, સાધ્ય સિવાય બીજી દરેક કલ્પના પક્ષને વિરુદ્ધ હોવાથી સાધ્ય સિવાય બીજી કોઈ પણ બાબત સંભવતી નથી, એવી સિદ્ધતા આપવી વધારે સહેલી પડે છે.

તેમ છતાં, જ્યાં સાધ્યને ફક્ત એક કે બે વિકલ્પ હોય છે ત્યાંજ આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો સગવડ ભરેલો હોય છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ.

ઉદાહરણ.

કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી કર્ણના અર્ધ બરાબર હોય છે.



પક્ષ—अबक કાટખુણુ ત્રિકોણુ છે; **ड**, **अक**નું મધ્યબિંદુ છે.

સાધ્ય—बड = अड = डक.

સિદ્ધતા—कड અથવા **अड**ની બરાબર **बड** ન હોય, તો તેનાથી નાની કે મોટી હોવી જોઈએ. એ સિવાય ત્રીજી સ્થિતિ સંભવતી નથી.

તે નાની હોય તો—

∠**बअड** < ∠**अबड** થાય,

અને ∠**बकड** < ∠**कबड** થાય,

એટલે (∠**बअड**+∠**बकड**) < ∠**अबक** થાય;

અને મોટી હોય તો—

(∠**बअक**+ ∠**बकअ**) > ∠**अबक** થાય.

પણુ એમાંની એક પણુ બાબત શક્ય નથી;

કારણુ કે ∠**अबक** = ૧ કાટખુણો છે; અર્થાત્ ∠**बअक**+∠**बकअ**=∠**अबक** છે.

માટે **बड**, **अड**થી નાની પણુ નથી, અને મોટી પણુ નથી; એટલે બંને સરખી છે.



ઉત્તરો.

(નીચે આપેલા કેટલાક ઉત્તરો ખરા ઉત્તરોની લગભગનાં છે. વિદ્યાર્થીએ માપણી કરીને આપવાના ઉત્તરોમાં $\frac{1}{10}$ ઇંચ જેટલી અથવા એકાદ અંશ જેટલી ચૂક હોય તો તે ગણવા જેવી નથી.)

પૃષ્ઠ ૧૫–૧૬.

પ્ર. ૧. ૧·૬"; ૪૦ મિ. મી.

પ્ર. ૪. પહેલી લીટી=૪૦ મિ. મી; ૧·૬".
બીજી લીટી=૪૯ મિ. મી; ૧·૯૫".

પ્ર. ૫. **अक**=·૮"; **कब**=·૪"; **अब**=૧·૨".

પ્ર. ૬. **अक**=·૬"; **कड**=·૪"; **डब**=·૩"; **अब**=૧·૩".

પ્ર. ૭. **अब**=૧·૭૫"; **अक**=·૮૫"; **कब**=·૯".

પૃષ્ઠ ૨૧–૨૪.

પ્ર. ૨. પહેલું વૃક્ષ=૩', ૨"; બીજું વૃક્ષ=૨', ૧$\frac{1}{2}$"; ત્રીજું વૃક્ષ=૨', ૭".

પ્ર. ૩. ૭૦૦ ફુટ.

પ્ર.૧૧. ૧૦'. **પ્ર. ૧૨.** ૪૧'. **પ્ર. ૧૩.** ૩૭·૨'

પ્ર.૧૪. ૯·૭૫ માઇલ. **પ્ર.૧૫.** ૭·૨ માઇલ.

પ્ર.૧૬. ૧૩·૩૭૫ માઇલ. **પ્ર.૧૭.** ૩·૭૫ માઇલ.

પ્ર.૧૮. ૪૦૦'.

પૃષ્ઠ ૪૭–૪૮.

પ્ર. ૧. પૂર્વની ઉત્તરે ૬૦°; ઉત્તરની પશ્ચિમે ૩૦°.

પ્ર. ૨. વાયવ્ય ખુણો.

પ્ર. ૩. પશ્ચિમની ઉત્તરે ૨૬°.

પ્ર. ૪. ૫·૧૨૫ માઇલ; પશ્ચિમની દક્ષિણે ૬૧°.

પ્ર. ૫. ૬$\frac{3}{4}$ માઇલ; પૂર્વની ઉત્તરે ૨૫°.

પ્ર. ૬. ૨૮·૭૫ માઇલ; દક્ષિણની પશ્ચિમે ૯°.
પ્ર. ૭. દક્ષિણની પૂર્વે ૩૬°; ૩·૯૫ માઇલ.
પ્ર. ૮. ૪·૦૬૨૫ માઇલ.
પ્ર. ૯. લગભગ ૧૨૨૫ ફુટ.
પ્ર. ૧૦. ૬ સેં. મી. પ્ર. ૧૧. ૫૭½ ક્યુબિટ.

(સમાપ્ત)